

通り変位軸力測定法の精度改善を目的とした離散正弦変換軌道モデルの有用性

新潟大学大学院自然科学研究科 学生員 滝林裕太
新潟大学工学部 正会員 阿部 和久
新潟大学工学部 正会員 紅露 一寛

1 はじめに

ロングレールはまくらぎ締結により、その両端の可動区間を除いて伸縮が拘束されるため、不動区間には温度変化に伴い温度応力が発生する。温度変化による軸力の発生は座屈や破断の原因となるため、レール軸力を正確に測定し、保守管理を適切に行う必要がある。現在、軸力はレール温度とひずみゲージ等で測られた伸縮量から間接的に求められているため、軌道全区間において測定するとなると膨大な時間と労力が必要となり、現実的でない。そこで、本研究室では、在来線の営業車両に搭載された検測装置による通り変位の計測データを活用した高頻度軸力測定法の開発を試みている¹⁾。しかし、提案された手法では、相対軸力は比較的良好な精度で推定できるものの、絶対軸力の推定が依然困難なままとなっていた。その原因は測定誤差の存在にある。また、当該法では初期通り変位を未知量とせず軸力を推定可能であったが、ベイズの定理に基づいた定式化が困難となっていた。加えて、推定に用いる軌道モデルに通常のはり要素を用いる場合、たわみ角を変数とする必要があり、たわみのみ測定する実状と整合していない。そこで、本研究ではたわみ角を用いず、たわみのみを変数とした離散正弦変換による軌道変形解析法を構成し、軸力推定法への適用を通しその有用性を検証する。

2 はり要素モデルを用いた従来手法の概要

左右レールの締結部に作用する力は、レールとまくらぎの相対変位により与えられる。すると、レールのつり合い方程式は次式で与えられる。

$$EIw_L'''' + N(w_L'' + w_{L0}'') + k_r(w_L - w_s) = 0, \quad (2.1)$$

$$EIw_R'''' + N(w_R'' + w_{R0}'') + k_r(w_R - w_s) = 0 \quad (2.2)$$

ここで、 E はレールのヤング率、 I はレール弱軸回りの断面二次モーメント、 N は軸力（圧縮を正）、 w_L, w_R は左右レールの弾性たわみ、 w_{L0}, w_{R0} は初期通り変位、 w_s はまくらぎ変位、 k_r は締結部の横剛性である。また、 $()'$ は軌道長手方向座標 x に関する微分である。(2.1)、(2.2) 式の和をとり、モデルのつり合い方程式は次式で与えられる。

$$EIw_{LR}'''' + N(w_{LR}'' + w_{LR0}'') + \frac{k_s}{2}w_{LR} = 0 \quad (2.3)$$

ここで、 w_{LR}, w_{LR0} はそれぞれ左右レールの弾性たわみの和、初期通り変位の和、 k_s はまくらぎの横剛性である。また、式(2.3)を通常用いられるはり要素により離散化すると次のつり合い方程式を得る。

$$[\mathbf{K}][\mathbf{W}] = N[\mathbf{K}_2][\mathbf{W}_0], [\mathbf{K}] = [\mathbf{K}_1 + \frac{k_s}{2}\mathbf{I}_0 - N\mathbf{K}_2] = \mathbf{0} \quad (2.4)$$

ここで、 $[\mathbf{K}_1], [\mathbf{K}_2]$ はそれぞれ EIw_{LR}'''' 、 w_{LR}'' を離散化して得られる要素剛性行列である。また、 $\{\mathbf{W}\}, \{\mathbf{W}_0\}$ はそれぞれ w_{LR}, w_{LR0} に関する節点変位ベクトルである。さらに \mathbf{I}_0 は $k_s/2w_{LR}$ の項を離散化して得られる行列である。したがって通り変位の測定データと、軌道モデルとは次の関係が成立する。

$$\{\mathbf{y}\} = [\mathbf{B}][\mathbf{I} + N\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}_2]\{\mathbf{W}_0\} + \{\boldsymbol{\epsilon}\} \quad (2.5)$$

ここで、 $\{\mathbf{y}\}$ は通り変位の測定データ、 $\{\boldsymbol{\epsilon}\}$ は測定ノイズである。また、 $[\mathbf{B}]$ はたわみとたわみ角を成分に持つ節点データからたわみ成分のみ抽出する行列である。ただし、現在の営業列車から得られる測定データにたわみ角は含まれていないため、離散正弦変換に基づきモデルを再構築する。

3 離散正弦変換に基づくモデル化

本手法では、レールは Euler 梁によってモデル化する。本来、締結部のレール拘束力は離散的に作用するが、ここではそれを連続支持モデルにより近似表現する。

3.1 離散たわみデータを用いた軌道通り変位の表現

$x = 0, L$ でゼロとなるたわみ $w(x)$ を対象とする。 $w(x)$ を表現する関数基底として、次の \sin 関数を用いることを考える。

$$g_m = \frac{1}{L} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (3.1)$$

$w(x)$ を次式により表す。

$$w(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \hat{w}_m g_m(x) \quad (3.2)$$

ここで、 \hat{w}_m は展開係数である。 $0 \leq x \leq L$ に $N+1$ 個の離散点を等間隔に置き、 $x_i = i\Delta x$ におけるたわみを $w_i = w(x_i)$ で与えるものとする。このとき、次式が成り立つように \hat{w}_m を定める。

$$w_l = \sum_{m=1}^{N-1} \hat{w}_m g_{lm} \quad (3.3)$$

$$g_{lm} = \hat{g}_l m = \sqrt{\frac{2}{N}} \sin\left(\frac{\pi}{N} lm\right) \quad (3.4)$$

また、軌道通り変位のつり合い式に、式(3.2)を代入すると次式を得る。

$$(EI k_m^4 - N k_m^2 + \frac{k_s}{2}) \hat{w}_m - N k_m^2 \hat{w}_{0m} = 0 \quad (3.5)$$

式(3.5)より、全通り変位(初期通り変位と弾性たわみの和)の正弦変換成分は次式で与えられる。

$$\hat{w}_m + \hat{w}_{0m} = \left(1 + \frac{N k_m^2}{EI k_m^4 - N k_m^2 + k_s/2}\right) \hat{w}_{0m} \quad (3.6)$$

式(3.6)より、次の通り変位の測定データと初期通り変位との関係を得る。

$$\{\mathbf{y}\} = [\mathbf{G}\hat{\mathbf{I}}\mathbf{G}]\{\mathbf{W}_0\} + \{\boldsymbol{\epsilon}\}, \quad (3.7)$$

$$\hat{I}_{mm} = 1 + \frac{N k_m^2}{EI k_m^4 - N k_m^2 + k_s/2} \quad (3.8)$$

ここで、 $[\hat{\mathbf{I}}]$ は式(3.8)における \hat{I}_{mm} を対角成分に持つ対角行列であり、 $[\mathbf{G}]$ は g_{ml} を成分に持つ正方行列である。式(3.7)の両辺に左から $[\mathbf{G}]$ をかけて離散正弦変換すると次式を得る。

$$\{\hat{\mathbf{y}}\} = [\hat{\mathbf{I}}]\{\hat{\mathbf{W}}_0\} + \{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}\} \quad (3.9)$$

式(3.9)を用いれば、初期通り変位の未知量にはたわみ角成分が含まれず、観測点に対応した初期通り変位を推定すればよい。

4 目的関数の導出²⁾

式(3.9)に基づく軸力推定を行うにあたり、未知量を $\{\mathbf{X}\} = \{\hat{\mathbf{W}}_0, N_1, N_2, k_s\}$ で与え、ベイズの定理に基づいた次の目的関数 J を設定する。

$$J = \frac{1}{2\sigma_\epsilon^2} \sum_{\alpha} \|\hat{\mathbf{y}}_{\alpha} - \hat{\mathbf{I}}_{\alpha} \hat{\mathbf{W}}_0\|^2 + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{W}}_0^T \hat{\Phi} \hat{\mathbf{W}}_0 \quad (4.1)$$

ここで、 $\{\hat{\mathbf{y}}_{\alpha}\}$ 、 $[\hat{\mathbf{I}}_{\alpha}]$ は、軸力 N_{α} における通り変位測定データ、及び式(3.7)の $[\hat{\mathbf{I}}]$ である。なお、 σ_ϵ^2 は事前に与えられているものとする。一方、 $[\hat{\Phi}]$ はハイパーパラメータとして別途求める。 J の最小値を与える $\{\mathbf{X}\}$ が推定値となる。これはNewton法に基づき次式より求める。

$$\left[\frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{X}^2} \right] \{\Delta \mathbf{X}\} = - \left\{ \frac{\partial J}{\partial \mathbf{X}} \right\}, \quad (4.2)$$

$$\{\mathbf{X}^{k+1}\} = \{\mathbf{X}^k\} + \beta \{\Delta \mathbf{X}^k\}, \quad \beta > 0 \quad (4.3)$$

式(4.2)の \mathbf{X} は式(4.3)によって更新され、推定値を求めていく。

5 数値モデルによる検証

5.1 解析条件

式(2.4)を用い、測定データに相当する通り変位の測定データを作成した。50kgN レールを対象とし、まくらぎ間隔は0.6m、単位長さ当たりの道床横剛性は $2\text{MN}/\text{m}^2$ 、²⁾軌道は長手方向に200mとし全区間を5cmのはり要素で分割した。また、初期通り変位、ノイズの標準偏差はそれぞれ $\sigma = 1\text{cm}$ 、 $\sigma_\epsilon = 0.5\text{mm}$ とした。

5.2 推定結果

N_1, N_2 に任意の値を設定して作成した疑似測定データを対象に本手法を適用した。

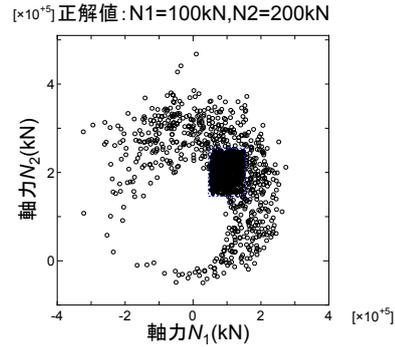


図-1 軸力初期値と推定値の分布 ($N_1 = 100\text{kN}$, $N_2 = 200\text{kN}$)

図-1は正解値を $N_1=100\text{kN}$ 、 $N_2=200\text{kN}$ に設定した場合の結果である。図には正解 $\pm 50\text{kN}$ 以内の推定解を得た場合を対象に、初期値を○で、推定値を●で示したものである。図からもわかるように正解値を中心とした比較的広範な範囲で良好な推定が行われていることが確認できる。

6 おわりに

本研究では、たわみのみを用いた離散正弦変換による軌道変形通り変位解析法を構築し、その有用性を検証した。当該法では、離散点におけるたわみのみが変数となり、たわみ角が不要となる。その結果、軸力の正解値を極端に大きく設定した場合や、初期通り変位の標準偏差を小さく設定した場合などには推定精度が低下するものの、50kgN レールを対象とした場合、比較的広範な初期値では、概ね良好な精度で推定が可能であることを確認した。

参考文献

- 1) 阿部和久, 千葉颯兵, 佐藤拓郎, 小松佳弘, 紅露一寛: 通り変位測定データを用いた軌道力学状態推定に関する基礎的検討, 鉄道工学シンポジウム論文集, 第22号, 107-114, 2018.
- 2) 宮井 徹: エネルギー法による軌道座屈の数値解析, 鉄道技術研究報告, No.1271, 1984.