

# モンテカルロ・シミュレーションに基づく簡易な部分係数設定方法の提案

新潟大学大学院 学生会員 ○ 岩瀬 智恵  
新潟大学 正会員 大竹 雄  
岐阜大学 正会員 本城 勇介  
東京都市大学 正会員 吉田 郁政

## 1 研究の背景と目的

### 1.1 研究の背景

近年、国内外の主要な設計コード<sup>1)2)3)</sup>が信頼性設計を導入するようになった。これらの設計コードでは、主に新設構造物が対象とされているが、今後は、施工中や供用中の構造物に対して、観測に基づいて部分係数を設計者実務者自らが設定する機会が増えると考えられる。本研究では、FORMなどの伝統的な部分係数設定の考え方を踏襲しつつ、設計実務者にとってユーザーフレンドリーな、MCSに基づく簡易な設定方法を提案することを目的とする。

## 2 研究の方法

### 2.1 部分係数の基本的な考え方 (FORM)

不確実性を有する設計にかかわる各種因子（基本変数）、ベクトル  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  で表すとする。この時、予め設定した限界状態に対する安全性余裕  $M$  を、性能関数  $g(\mathbf{X})$  として次式を定義する。

$$M = g(\mathbf{X}) = R(\mathbf{X}) - S(\mathbf{X}) \quad (1)$$

ここに  $R$  は抵抗、 $S$  は荷重であり、これらは基本変数の関数である。信頼性解析では、 $M \leq 0$  で構造物が限界状態を保てないことを意味する。この状態に至る確率（破壊確率）は下式となる。

$$P_f = P(M \leq 0) = \int_{-\infty}^{\infty} F_R(x) f_S(x) dx \quad (2)$$

しかしこの積分はごく限られた場合にしか解析的に解けないため、近似的な計算方法として FORM (First-Order Reliability Method) が開発された。

FORMでは、性能関数  $g(\mathbf{X})$  を設計点  $\mathbf{X}^d$  においてテーラー展開して1次までの近似を考えることが基本的な考え方である。設計点とは、 $g(\mathbf{X}) = 0$  となる点のうち、同時確率密度が最大となる点である。このことから、性能関数

$g(\mathbf{X})$  とその平均  $\mu_g$  と標準偏差  $\sigma_g$  は下式で表される。

$$\begin{aligned} g(\mathbf{X}) &\approx \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} \Big|_{x^d} \right) (x_i - x_i^d) \\ \mu_g &\approx \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} \Big|_{x^d} \right) (\mu_{x_i} - x_i^d) \\ \sigma_g &\approx \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} \Big|_{x^d} \right)^2 \sigma_{x_i}^2} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} \Big|_{x^d} \right) \sigma_{x_i} \end{aligned}$$

また、FORMでは破壊確率  $P_f$  の代わりに、下記で定義される信頼性指標  $\beta$  が用いられる。

$$\beta = \frac{\mu_g}{\sigma_g} = \frac{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} \Big|_{x^d} \right) (\mu_{x_i} - x_i^d)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} \Big|_{x^d} \right)^2 \sigma_{x_i}^2}} \quad (3)$$

信頼性指標  $\beta$  と破壊確率  $P_f$  は、性能関数  $M$  が正規分布する場合、次の関係がある。

$$P_f = \Phi(-\beta) \quad (4)$$

ここで、 $\Phi(\cdot)$  は、標準正規分布の累積関数である。そして、基本変数が互いに独立であり、正規分布するとの仮定に基づいて、部分係数  $\gamma_{x_i}$  は下式で記述される。

$$\gamma_{x_i} = \frac{\mu_{x_i}}{x_i^p} (1.0 - \beta_T \alpha_i V_i) = \frac{x_i^d}{x_i^p} \quad (5)$$

ここで、 $x_i^p$  は、基本変数  $x_i$  の特性値、 $\alpha_i$  は、基本変数  $X_i$  の感度係数、 $\beta_T$  は目標信頼性、 $V_i$  は変動係数である。そして、部分係数は、特性値と設計点の比を意味している。

基本変数の確率変数が正規分布でない場合には、設計点において、確率密度と確率分布の値が一致するように正規確率変数で近似する。これは正規化近似<sup>4)</sup>と呼称される。なお、設計点と感度係数は事前にわからないので、事前に仮の値を設定し、収束計算を行うことで、部分係数が決定される。

### 2.2 MCS を用いた方法

MCS を用いた方法では<sup>5)</sup>、性能関数に含まれる基本変数ベクトル  $\mathbf{X}$  について、それぞれの従う確率分布に従っ

て疑似乱数を生成し、式 (6) に従って、同時確率密度の最大点を探索することで、設計点を求める。

$$\begin{aligned} & \operatorname{argmax}_{r,s} f_{R,S}(r,s) & (6) \\ & \text{subject to } g = R - S = 0 \end{aligned}$$

その上で、特性値との比をとり部分係数とする非常に簡単な手順に置き換えることができる。従って、MCSを用いた方法による部分係数の設定は、MCSによる設計点の探索の精度が部分係数設定上の課題となる。

ここでは、設計点探索の精度を上げるため、粒子群最適化法 (Particle Swarm Optimization, 以下 PSO<sup>6</sup>) と呼称する) を適用することで、効率的な演算をすることを提案する。

PSO とは、大域解探索法のひとつであり、各粒子は位置  $X$  と速度  $V$  によって特徴付けられる。

$$\text{位置: } \mathbf{X}^i \equiv (X_1^i, \dots, X_M^i), \text{ 速度: } \mathbf{V}^i \equiv (V_1^i, \dots, V_M^i) \quad (7)$$

ここで、 $i$  は粒子のインデックスであり、1 から  $N$  までの値をとる。 $M$  は探索空間の次元であり、位置は潜在解に相当する。各粒子は、探索空間内に与えられた、各々の初期値から、与えられた初速度で移動する。粒子の動作では、パーソナルベスト  $P_{best}$  とグローバルベスト  $G_{best}$  と呼ばれる値が重要である。パーソナルベストとは、 $i$  番目の粒子の現在までの最良値である。全ての粒子のパーソナルベストの中で最良の値をグローバルベストと呼ぶ。グローバルベストはその時点での近似解となる。更新式は以下の通りである。

$$\begin{aligned} V_j^i(n+1) &= wV_j^i(n) + c_1r_1(P_{best} - X_j^i(n)) \\ &\quad + c_2r_2(G_{best} - X_j^i(n)) \\ X_j^i(n+1) &= X_j^i(n) + V_j^i(n) \end{aligned}$$

ただし、 $w$ : 粒子の慣性、 $n$ : 計算ステップにおける時間、 $c_1$ : 認知的パラメータ、 $c_2$ : 社会的パラメータ、 $r_1, r_2$ : 粒子の自由度である。粒子の自由度は  $[0, 1]$  の一様分布に従う乱数で定義される。探索は、収束計算を行うか、探索回数を十分に与えることで制御する。

設計点を PSO で同定するために、MCS で設計点のおおよその位置を決定したのち、その周辺に疑似乱数を発生させた。それを初期位置に持つ粒子を用いて、設計点を探索する。破壊領域内を探索空間とし、同時確率密度が最大となる点を探索した。初期速度は 0、他のパラメータの値は表-1 とした<sup>8)</sup>。

表-1 PSO における各パラメータの値

$w$	$c_1$	$c_2$
0.729	1.49	1.49

表-2 例題 1: 確率変数のパラメータ

	平均	標準偏差	変動係数
$R_t$	6000	2400	0.4
$R_s$	4000	800	0.2
$S$	4000	1200	0.3

### 3 試算結果

#### 3.1 試算条件

提案手法の有効性を検証するため、異なる性能関数を持つ二つの例題について検討した。それぞれ確率変数は、全て正規分布に従う場合と、全て対数正規分布に従う場合の二つを考える。

##### 3.1.1 例題 1: 線形の性能関数

例題 1 では、単純な杭の鉛直支持問題を想定した問題を考え、性能関数は次式とした。

$$g = R - S = R_s + R_t - S \quad (8)$$

ここで、 $R_s$ : 周面抵抗力、 $R_t$ : 先端抵抗力、 $S$ : 荷重である。各パラメータの値は表-2 に示した。

##### 3.1.2 例題 2: 非線形の性能関数

単純梁の支間中央に集中荷重がかかる問題を考え、性能関数は次式とした。

$$g = R - S = R - \frac{PL^3}{48EI} \quad (9)$$

ここで、 $P$ : 荷重、 $E$ : ヤング率、 $R$ : 限界たわみ量、 $L$ : 長さであるとする。これらを不確定性を有する確率変数とし、試算を行なった。各パラメータの値は表-3 に示した。断面 2 次モーメントについては確定値とし、 $I = 2$  とする。

図-1(a)(b) は、例題 1, 2 の PSO の探索粒子数  $N$  を変えながら、100 回設計点を同定し、その変動係数  $COV_R$  を図化したものである。

それぞれ探索粒子数に応じて、分散は大きく低減する傾向がある。ここではこの分散の低減傾向から、 $N = 10000$  を採用することとした。

#### 3.2 計算結果

図-2 は、例題 1, 2 について、MCS のみ、MCS と PSO で設計点を探索した結果をそれぞれ 100 ケースずつ、FORM に

表-3 例題 2：確率変数のパラメータ

	平均	標準偏差	変動係数
荷重 $P$	50	30	0.60
ヤング率 $E$	10000	1000	0.10
長さ $L$	10	1.0	0.10
たわみ量の限界値 $R$	0.15	0.03	0.20

※断面二次モーメント  $I=2$  (確定値)

よって算定した設計点をプロットした図である。図-2(a)(c)は、それぞれ例題 1, 2 について、基本変数が正規分布に従うとして試算し、図-2(b)(d)は、それぞれ例題 1, 2 について、基本変数が対数正規分布に従うとして試算した結果を示している。MCS では、探索するたびに同定される点が異なり、ばらつきが非常に大きいことが読み取れる。このことから、R-S 空間上に多峰性の有する最適化問題であり、適切に同時確率密度の最大点を同定できていないことが考えられる。一方、大域解探索型の MCS と PSO を用いた場合、ばらつきが非常に小さく、安定した結果が得られている事がわかる。

なお、FORM は、基本変数が非正規分布の場合、正規化近似により、同時確率密度の最大点ではない点を設計点として定めていることも読み取れる。

## 4 今後の展望

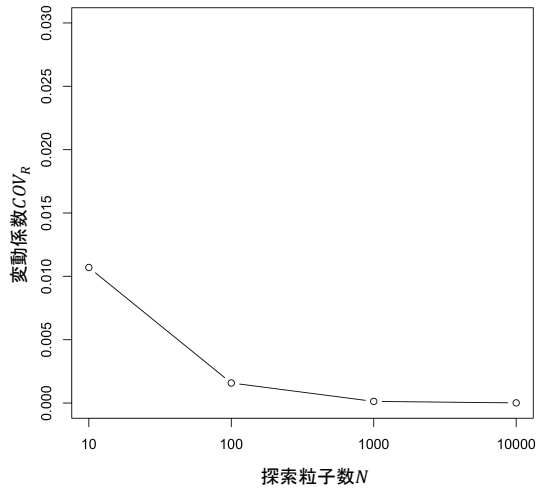
本研究は、MCS と PSO による効率的な探索を組み合わせた部分係数の同定方法を提案し、簡単な例題に適用することにより、有効性を検証した。今後は、MCS に基づいた感度係数の効率的な計算方法を提案する予定である。

## 5 参考文献

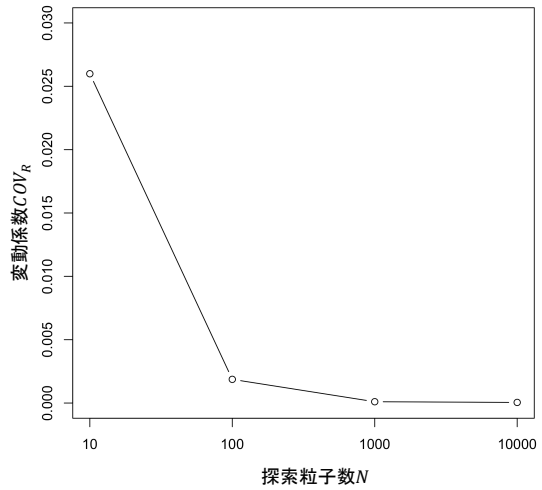
### 参考文献

- 1) CEN:EN1997-1 Eurocode7 Geotechnical Design - Part1:General Rules,2004
- 2) AASHTO:AASHTO LRFD Bridge design specifications, SIunits,first edition,1994
- 3) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説 I 共通編，丸善出版，2017.
- 4) 星谷勝・石井清：構造物の信頼性設計法，鹿島出版社，2007.
- 5) 本城勇介・大竹雄：信頼性設計法と性能設計の理念の実際～地盤構造物を中心として～，技報堂出版，2018
- 6) 斎藤 利通：粒子群最適化と非線形システム，電子情報通信学会 基礎・境界ソサイエティ Fundamentals Review, Vol5, pp.155-161, No.2, 2011
- 7) J.Kennedy and R.C.Eberhart : Particle Swarm Optimization,Proc.The 1995 IEEE International Conference on Neural Networks , vol.IV, p.1942-1948 , 1995.

- 8) Schmitt, B.I. : Convergence Analysis for Particle Swarm Optimization,https://opus4.kobv.de/opus4-fau/frontdoor/index/index/docId/6162, 2015

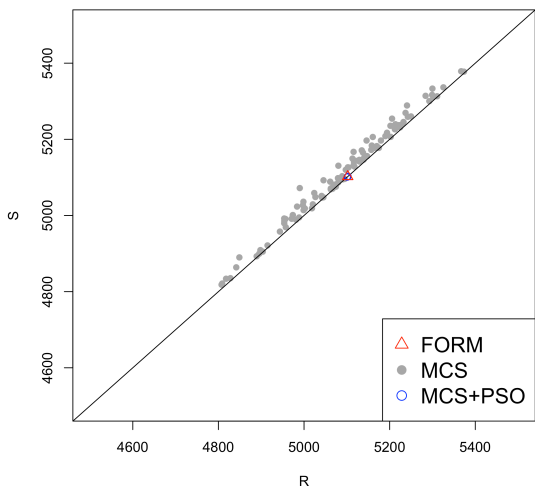


(a) 性能関数  $g = R_s + R_t - S$

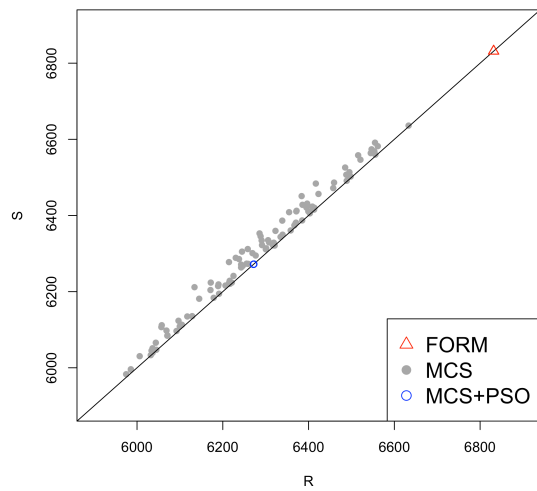


(b) 性能関数  $g = R - \frac{PL^3}{48EI}$

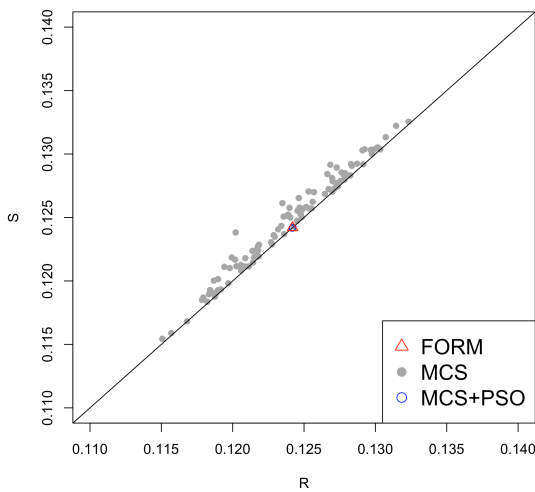
図-1 各手法の設計点



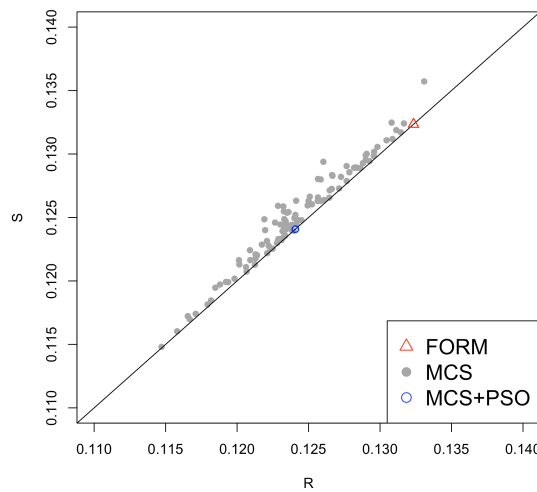
(a) 線形・正規分布



(b) 線形・対数正規分布



(c) 非線形・正規分布



(d) 非線形・対数正規分布

図-2 各手法の設計点