離散正弦変換軌道モデルを用いた通り変位軸力測定法に関する検討

新潟大学大学院自然科学研究科　学生員　滝林裕太
新潟大学工学部　正会員　阿部 和久
新潟大学工学部　正会員　紅露 一寛

1　はじめに

ロングレールはまくらぎ締結により, その両端の可動区間を除いて伸縮が拘束されるため, 不動区間には温度変化に伴い温度応力が発生する. 温度変化による軸力の発生は座屈や破断の原因となるため, レール軸力を正確に測定し, 保守管理を適切に行う必要がある. 現在, 軸力はレール温度とふく進量等から測られた伸縮量より間接的に求められているため, 軌道全区間において測定するとなると膨大な時間と労力が必要となり, 現実的ではない. そこで, 本研究室では, 在来線の営業車両に搭載された検測装置による通り変位の計測データを活用した高頻度軸力測定法の開発を試みている [1]. しかし, 提案された手法では, 相対軸力は比較的良好な精度で推定できるものの, 絶対軸力の推定が依然困難なままとなっていた. その原因は測定誤差の存在にある. また, 推定に用いる軌道モデルに通常のはり要素を用いる場合, たわみ角を変数とする必要があり, たわみのみ測定する実状と整合していない. そこで, 本研究ではたわみ角を用いず, たわみのみを変数とした離散正弦変換による軌道変形解析法を用い, 軸力, 道床横剛性を設定して, 初期通り変位を最小二乗法により推定する. その下で, 未知量空間の離散点毎に観測値との誤差二乗和を求め, 重み付け平均から正解値の推定を試みる.

2　はり要素モデルを用いた従来手法の概要

左右レールの締結部に作用する力は, レールとまくらぎの相対変位により与えられる. すると, レールのつり合い方程式は次式で与えられる

$$
\begin{aligned}
&EIw_L'''' + N(w_L'' + w_{L0}'') + k_r(w_L - w_s) = 0,\\
&EIw_R'''' + N(w_R'' + w_{R0}'') + k_r(w_R - w_s) = 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ここで, E はレールのヤング率, I はレール弱軸回りの断面二次モーメント, N は軸力 (圧縮を正), w_L, w_R は左右レールの弾性たわみ, w_{L0}, w_{R0} は初期通り変位, w_s はまくらぎ横変位, k_r は締結部の横剛性である. また, $(\ )'$ は軌道長手方向座標 x に関する微分である. 式 (1) にはまくらぎ横変位 w_s が含まれている. 道床横抵抗力がまくらぎ横変位に関して線形ばね k_s により近似できるものとする. ここで, まくらぎのつり合い式は次式で与えられる.

$$
\begin{aligned}
k_s w_s &= k_r(w_L + w_R - 2w_s)\\
w_s &= \frac{k_r}{2k_r + k_s}(w_L + w_R)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

式 (2) を式 (1) へ代入し w_s を消去すると次式を得る.

$$
\begin{aligned}
&EIw_L'''' + N(w_L'' + w_{L0}'') + k_r w_L - \frac{{k_r}^2}{2k_r + k_s}(w_L + w_R) = 0,\\
&EIw_R'''' + N(w_R'' + w_{R0}'') + k_r w_R - \frac{{k_r}^2}{2k_r + k_s}(w_L + w_R) = 0
\end{aligned}
\tag{3}
$$

式 (3) の和をとると, モデルのつり合い方程式は次式で与えられる.

$$
EIw_{LR}'''' + N(w_{LR}'' + w_{LR0}'') + \frac{k_s}{2} w_{LR} = 0 \tag{4}
$$

ここで, w_{LR}, w_{LR0} はそれぞれ左右レールの弾性たわみの和, および初期通り変位の和, k_s はまくらぎの横剛性である. また, 式 (4) を通常用いられるはり要素により離散化すると, 次のつり合い方程式を得る.

$$
\begin{aligned}
&[\mathbf{K}][\mathbf{W}] = N[\mathbf{K_2}][\mathbf{W_0}],\\
&[\mathbf{K}] = [\mathbf{K_1} + \frac{k_s}{\mathbf{2}}\mathbf{I_0} - N\mathbf{K_2}] = \mathbf{0}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

ここで, $[\mathbf{K_1}], [\mathbf{K_2}]$ はそれぞれ EIw_{LR}'''', w_{LR}'' を離散化して得られる要素剛性行列である. また, $\{\mathbf{W}\}, \{\mathbf{W_0}\}$ はそれぞれ w_{LR}, w_{LR0} に関する節点変位ベクトルである. さらに $\mathbf{I_0}$ は $k_s/2w_{LR}$ の項を離散化して得られる行列である. したがって通り変位の測定データと, 軌道モデルとには次の関係が成立する.

$$
\{\mathbf{y}\} = [\mathbf{B}][\mathbf{I} + N\mathbf{K^{-1}K_2}]\{\mathbf{W_0}\} + \{\boldsymbol{\epsilon}\} \tag{6}
$$

ここで, $\{\mathbf{y}\}$ は通り変位の測定データ, $\{\boldsymbol{\epsilon}\}$ は測定ノイズである. また, $[\mathbf{B}]$ はたわみとたわみ角を成分に持つ節点データからたわみ成分のみ抽出する行列である. 式 (6) より, 左辺の測定データを未知量の含まれている数値モデル項とノイズ項とに分離して記述できていることが分かる. ただし, 未知量のうち初期通り変位については, はり要素を用いているため, たわみのみならず, たわみ角成分の推定も必要となる. 現在の営業列車から得られる測定データにたわみ角は含まれていないため未知量が約倍になる. そのため, 離散正弦変換に基づいた定式化を用いる.

3　離散正弦変換に基づくモデル化

本手法では, レールはEuler梁によってモデル化する．本来, 締結部のレール拘束力は離散的に作用するが, ここではそれを連続支持モデルにより近似表現する．

3.1　離散たわみデータを用いた軌道通り変位の表現

$x = 0, L$ でゼロとなるたわみ $w(x)$ を対象とする．$w(x)$ を表現する関数基底として, 次の sin 関数を用いることを考える．

$$g'_m = \sin(\frac{m\pi x}{L}) \tag{7}$$

$w(x)$ を次式により表す．

$$w(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \hat{w}'_m g'_m(x) \tag{8}$$

ここで, $\hat{w}'_m$ は展開係数である．

$0 \leq x \leq L$ に $N+1$ 個の離散点を等間隔に置き, $x_i = i\Delta x$ におけるたわみを $w_i = w(x_i)$ で与えるものとする．このとき, 次式が成り立つように改めて $\hat{w}_m$ を定める．

$$w_i = \sum_{m=1}^{N} \hat{w}_m g_{im}$$

$$g_{im} = g_m(x_i) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sin(\frac{\pi}{L}\Delta x m i) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sin(\frac{\pi}{N} m i) \tag{9}$$

$\hat{w}_m$ は式 (9) の方程式を解けば, 形式的に次のようにして求めることができる．

$$\hat{w}_i = \sum_{m=1}^{N-1} g^{-1}_{im} w_m \tag{10}$$

ここで, g^{-1}_{im} は次式で与えられる．

$$g^{-1}_{im} = g_{im} = \sqrt{\frac{2}{N}} \sin(\frac{\pi}{N} i m) \tag{11}$$

また, 式 (7) より次の関係が成り立つ．

$$g_m{}'' = -k_m^2 g_m, \quad g_m{}'''' = k_m^4 g_m, \quad k_m = \frac{\pi}{L} m \tag{12}$$

また, 軌道通り変位のつり合い式に, 式 (8) を代入すると次式を得る．

$$(EIk_m^4 - Nk_m^2 + \frac{k_s}{2})\hat{w}_m - Nk_m^2 \hat{w}_{0m} = 0 \tag{13}$$

式 (13) より, 全通り変位 (初期通り変位と弾性たわみの和) の正弦変換成分は次式で与えられる．

$$\hat{w}_m + \hat{w}_{0m} = (1 + \frac{Nk_m^2}{EIk_m^4 - Nk_m^2 + k_s/2})\hat{w}_{0m} \tag{14}$$

式 (14) より, 次の通り変位の測定データと初期通り変位との関係を得る．

$$\begin{gathered}\{\mathbf{y}\} = [\mathbf{G}\hat{\mathbf{I}}\mathbf{G}]\{\mathbf{W_0}\} + \{\boldsymbol{\epsilon}\}, \\ \hat{I}_{mm} = 1 + \frac{Nk_m^2}{EIk_m^4 - Nk_m^2 + k_s/2}\end{gathered} \tag{15}$$

ここで, $[\hat{\mathbf{I}}]$ は式 (14) における $\hat{I}_{mm}$ を対角成分に持つ対角行列である．$[\mathbf{G}]$ は g_{mi} を成分に持つ正方行列である．離散正弦変換は次の関係で与えられる．

$$\{\mathbf{W}\} = [\mathbf{G}]\{\hat{\mathbf{W}}\}, \quad \{\hat{\mathbf{W}}\} = [\mathbf{G}]\{\mathbf{W}\} \tag{16}$$

式 (15) を用いれば, 初期通り変位の未知量にはたわみ角成分が含まれず, 観測点に対応した初期通り変位を推定すればよい．

3.2　正弦変換成分の確率特性

式 (15) の両辺に左から $[\mathbf{G}]$ をかけて離散正弦変換すると次式を得る．

$$\{\hat{\mathbf{y}}\} = [\hat{\mathbf{I}}]\{\hat{\mathbf{W}}_\mathbf{0}\} + \{\hat{\epsilon}\}, \quad \{\hat{\mathbf{y}}\} := [\mathbf{G}]\{\mathbf{y}\} \tag{17}$$

ノイズの離散正弦変換 $\{\hat{\epsilon}\}$ の期待値と共分散は次式のように求められる．

$$\begin{aligned} E(\hat{\epsilon}) &= E(\mathbf{G}\hat{\epsilon}) = [\mathbf{G}]\mathbf{E}(\boldsymbol{\epsilon}) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{cov}(\hat{\epsilon}) = \mathbf{E}(\hat{\epsilon}\hat{\epsilon}^\mathbf{T}) &= \mathbf{E}(\mathbf{G}\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}^\mathbf{T}\mathbf{G}) = [\mathbf{G}]\mathbf{E}(\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}^\mathbf{T})[\mathbf{G}] \\ &= \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\epsilon}}^2[\mathbf{GIG}] = \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\epsilon}}^\mathbf{2}[\mathbf{I}] = \mathbf{cov}(\boldsymbol{\epsilon}) \end{aligned} \tag{18}$$

よって, $\{\hat{\epsilon}\}$ の期待値と共分散は, $\{\boldsymbol{\epsilon}\}$ のそれらに一致する．ここで, ノイズは分散 $\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\epsilon}}^2$, 期待値 0 のガウスノイズで与えられるものと仮定する．一方, 初期通り変位の期待値を 0, 共分散行列を $[\mathbf{\Phi}^{-1}]$ とすると, $\{\hat{\mathbf{W}}_0\}$ の期待値, 共分散行列 $[\mathbf{\Phi}^{-1}]$ は以下の通り与えられる．

$$\begin{gathered} E(\hat{\mathbf{W}}_0) = E(\mathbf{G}\mathbf{W}_0) = [\mathbf{G}]\mathbf{E}(\mathbf{W}_0) = \{\mathbf{0}\}, \\ [\mathbf{\Phi}^{-1}] = E(\hat{\mathbf{W}}_0\hat{\mathbf{W}}_0^T) = E(\mathbf{G}\mathbf{W}_0{\mathbf{W}_0}^T\mathbf{G}) = [\mathbf{G}\mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{G}] \end{gathered} \tag{19}$$

また, 式 (19) より $[\hat{\mathbf{\Phi}}]$ は次式で与えられる．

$$[\hat{\mathbf{\Phi}}] = [\mathbf{G}\mathbf{\Phi}^{\mathbf{-1}}\mathbf{G}]^{\mathbf{-1}} = [\mathbf{G}\mathbf{\Phi}\mathbf{G}] \tag{20}$$

以上の関係より, 式 (17) による推定が可能である．

4　目的関数の設定

以下の解析では目的関数 J を, 2 つの時刻での軸力 N_1, N_2 における, 通り変位の変換係数に関する誤差二乗和により, 次式の様に設定する．

$$\begin{aligned} J = &(\hat{\mathbf{y}}_1 - \hat{\mathbf{I}}_1\hat{\mathbf{W}}_0)^\mathbf{T}(\hat{\mathbf{y}}_1 - \hat{\mathbf{I}}_1\hat{\mathbf{W}}_0) \\ &+ (\hat{\mathbf{y}}_2 - \hat{\mathbf{I}}_2\hat{\mathbf{W}}_0)^\mathbf{T}(\hat{\mathbf{y}}_2 - \hat{\mathbf{I}}_2\hat{\mathbf{W}}_0) \end{aligned} \tag{21}$$

$$\{\hat{\mathbf{y}}_i\} = [\hat{\mathbf{I}}_i]\{\hat{\mathbf{W}}_0\} + \{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\boldsymbol{i}}\} \quad (i = 1, 2) \tag{22}$$

3 つの未知量 $\{N_1, N_2, k_s\}$ をパラメーター空間内で順次設定し, その下で J を最小とする初期通り変位 $\hat{\mathbf{W}}_0$ を最小二乗法より次式から求める．

$$[\hat{\mathbf{I}}_1^2 + \hat{\mathbf{I}}_2^2]\{\hat{\mathbf{W}}_0\} = \{\hat{\mathbf{I}}_1\hat{\mathbf{y}}_1 + \hat{\mathbf{I}}_2\hat{\mathbf{y}}_2\} \tag{23}$$

得られた $\mathbf{W_0}$ に基づき, 設定した未知量ごとに, 目的関数 J を次式から求める.

$$J = \hat{\mathbf{y}}_1^{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{y}}_1 + \hat{\mathbf{y}}_2^{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{y}}_2 - [\hat{\mathbf{y}}_1^{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{I}}_1 + \hat{\mathbf{y}}_2^{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{I}}_2]\{\hat{\mathbf{W}}_0\} \tag{24}$$

J に基づき, 重み係数を次式より設定する.

$$\bar{w}_i = w_i / \sum_i w_i, \quad w_i = \mathrm{e}^{-\bar{J}_i/2{\sigma_\epsilon}^2} \tag{25}$$

ここで, $\bar{J}_i = J_i - J_{min}$ であり, J_i はパラメータ空間内の探査域における第 i 走査点に対する J の値, J_{min} は J_i の最小値である. また, ${\sigma_\epsilon}^2$ は測定ノイズの分散推定値である. 式 (25) で得られた w_i を重み係数として, 重みつき平均 $\bar{w}_i$ を求め, 次式より軸力を推定する.

$$\begin{aligned} N_1 &= \sum_i \bar{w}_i \times N_{1i} \\ N_2 &= \sum_i \bar{w}_i \times N_{2i} \end{aligned} \tag{26}$$

なお以下では, 3 つの時刻におけるデータによる, 各軸力 N_1, N_2, N_3 の推定も試みた. その場合の設定手順も上述に順じて設定した.

5 数値モデルによる検証

5.1 初期通り変位の設定

レールに所定の確率特性に従うランダムな通り変位波形を設定して, 軌道の変形解析を実施する. 以下にその設定手順について述べる. 通り変位の距離に関する自己相関関数を次式で設定する.

$$R(x) = \sigma^2 e^{-(x/d)} \tag{27}$$

ここで, σ と d は通り変位波形の標準偏差と相関長である. 長さ l の軌道区間を M 個のはり要素により, x 軸方向に等分割する場合を考える. その際に, i 番節点の x 座標 x_i を次式で与えるものとする.

$$x_i = i\Delta x, \quad (i = 0, \cdots, M), \quad \Delta x = \frac{l}{M} \tag{28}$$

レール通り変位波形の x_i における値を w_{0i} とし, その離散データを成分に持つベクトルを $\{\mathbf{W_0}\}$ とおく. すると, 当該ベクトルに関する分散 · 共分散行列 $[\mathbf{C}]$ は次式で与えられる.

$$[\mathbf{C}] = \mathbf{E}(\mathbf{W_0}\mathbf{W_0^T}) \tag{29}$$

ここで, $\mathbf{E}(\cdot)$ は期待値を, また $(\cdot)^{\mathbf{T}}$ は転置を表す. $[\mathbf{C}]$ の固有値問題を以下で与える.

$$[\mathbf{C}]\{\phi_\mathbf{i}\} = \lambda_\mathbf{i}\{\phi_\mathbf{i}\} \tag{30}$$

ここで, $\{\phi_i\}$ は固有ベクトル, λ_i は固有値である. 通り変形ベクトル $\{\mathbf{W_0}\}$ を期待値がゼロであり, 且つ式 (29) の分散 · 共分散行列で与えられる正規確率過程に従うものとすると, $\{\mathbf{W_0}\}$ は次式により生成することができる

$$\{\mathbf{W_0}\} = [\mathbf{\Phi}][\mathbf{\Lambda^{1/2}}]\{\boldsymbol{\xi}\} \tag{31}$$

ここで, $[\Lambda^{1/2}]$ は正の固有値の平方根 $\sqrt{\lambda_i}$ を対角項に持つ対角行列, $[\Phi]$ はそれに対応する固有ベクトル ϕ_i を縦ベクトル成分に持つ行列である. また, $\{\boldsymbol{\xi}\}$ は, 期待値ゼロ, 分散 1 の標準正規乱数を成分に持つベクトルである.

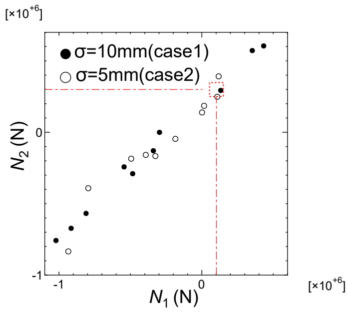
5.2 解析条件

式 (5) を用い, 測定データに相当する通り変位の疑似測定データを作成した. なお, 軌道は両端の影響が無視し得る程度に長く設定するものとし, 200m とした. 測定データは 0.25m 間隔で取得するものとし, 疑似測定データを作成した. レールは 50kgN レールを想定し, まくらぎ間隔は 0.6m, 単位長さ当たりの道床横剛性は 2MN/m^2, [2] である. レールの初期通り変位は式 (8) に基づき設定した. 初期通り変位の標準偏差は, 以下の解析では $\sigma = 1$cm および 5mm の 2 ケースで検討した. 相関長 a は, 5m と設定した. また, 疑似測定データの作成に当たり, ノイズの標準偏差は $\sigma_\epsilon = 0.5$mm とした. なお, 左右レールの通り変位を変数とするため, 初期通り変位及びノイズの標準偏差には上記の値を $\sqrt{2}$ 倍したものを設定する. 実際に推定に用いるデータは, ロングレール区間の一部から抽出することになるため, ここではそれを想定して 200m の区間のうち中央 50m 区間のデータをを用いた. ここで, 式 (21) に基づき未知量空間の離散点毎に観測値との誤差二乗和を求め, 式 (25) より重み付き平均を計算し, 軸力を推定する. また, 重みの大きい未知量空間の離散点分布を最小二乗法により直線近似し, その切片から相対軸力 ΔN を推定する.

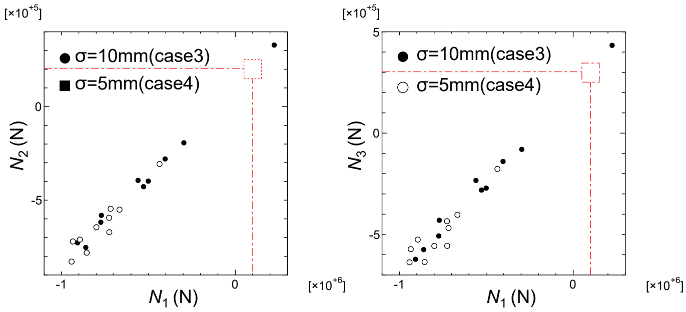
5.3 推定結果

3 つの未知量 $\{N_1, N_2, k_s\}$ をパラメーター空間内で順次設定し, σ=10mm(case1) および σ=5mm(case2) の 2 ケースを検討した. なお, 推定する軸力 N_1, N_2 の正解値は 100kN, 300kN としている. また, 未知量情報の増大からなる精度向上を狙い, 4 つの未知量 $\{N_1, N_2, N_3, k_s\}$ を設定し, σ=10mm(case3), σ=5mm(case4) の 2 ケースについても検討を行った. なお, その際の軸力の正解値は N_1=100kN, N_2=200kN, N_3=300kN とした. 軸力を走査する範囲はそれぞれ, -1500kN から 1500kN とし, 100kN 刻みで走査する. 道床横剛性は, 1MN/m^2 から 3MN/m^2 の範囲を 100kN/m^2 刻みで走査する. **図-1** は 3 つの未知量の下で, 式 (26) より

軸力の推定値を計算し，プロットした結果である．なお，プロット点は●が σ=10mm(case1)，○が σ=5mm(case2) の場合を示し，10 回の解析結果を表示している．また，赤い範囲は，正解値から ±50kN 以内を表示したものである．**図-2** は 4 つの未知量の下で解析を行った際の結果である．軸力走査範囲の下限値付近に推定値が集中していることがわかる．なお，走査下限値を同条件より低く設定した場合も，同じ傾向を示し，本手法での軸力推定には更なる工夫が必要である．



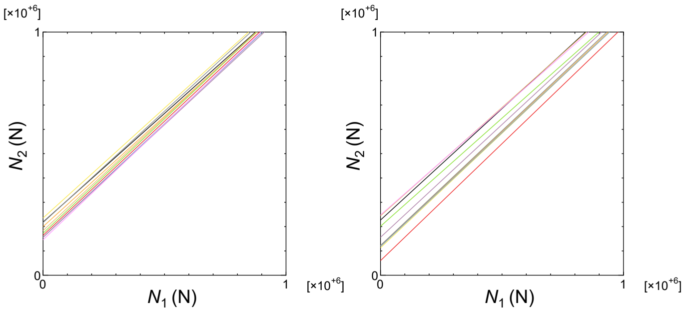
図–1　軸力推定結果 (未知量数:3)



(a)N_1-N_2 面　　(b)N_1-N_3 面

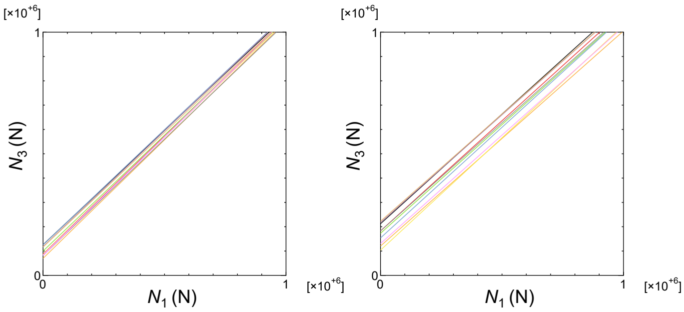
図–2　軸力推定結果 (未知量数:4)

図-3,4 は，3 つおよび 4 つの未知量の下で，式 (25) より求めた重みの大きい未知量空間における離散点分布を最小二乗近似した結果である．**図-3** には N_1-N_2 面を，**図-4** には N_1-N_3 面を示しており，10 回の結果を図示した．さらに，その切片の平均値より相対軸力 ΔN を推定した．推定値は，case1 では ΔN=185kN，case2 は ΔN=161kN，case3 は ΔN=205N，case4 は ΔN=170kN を示した．正解は 200kN であり，測定回数を増やすことで，初期通り変位の標準偏差が同じケースでも推定精度が向上し，値のバラつきも低減できることが分かった．



(a)σ =10mm(case1)　　(b)σ =5mm(case2)

図–3　N_1, N_2 離散点の直線近似 (未知量数:3)



(a)σ =10mm(case3)　　(b)σ =5mm(case4)

図–4　N_1, N_3 離散点の直線近似 (未知量数:4)

6　まとめ

本研究では，たわみの離散正弦変換による軌道通り変位解析法に基づくレール軸力推定法について検討した．推定結果から，絶対軸力の推定は依然困難ではあるが，相対軸力の推定は概ね良好な精度で推定が可能であることを確認した．

参考文献

1) 阿部和久，千葉颯兵，佐藤拓郎，小松佳弘，紅露一寛：通り変位測定データを用いた軌道力学状態推定に関する基礎的検討，鉄道工学シンポジウム論文集，第 22 号，107-114，2018.
2) 宮井 徹：エネルギー法による軌道座屈の数値解析，鉄道技術研究報告，No.1271，1984.