ランダムな凹凸を有するレール上を走行する二車輪の振動応答期待値解析

新潟大学大学院自然科学研究科　学生員　山田　壮太
新潟大学工学部社会基盤工学プログラム　正会員　阿部　和久
新潟大学工学部社会基盤工学プログラム　正会員　紅露　一寛

1　はじめに

列車走行時における鉄道軌道の動的応答特性の把握は，列車の走行安定性，乗り心地，地盤振動，騒音等の様々な観点から非常に重要である．特にレールは振動発生源である列車・軌道との境界に位置しており，その動的応答特性は連成系全体に大きく影響を及ぼす．加振源となる輪重履歴は，列車の走行速度と車輪・レール間凹凸特性に依存するため，振動の定量的評価にはこれらの設定も不可欠である．著者ら [1] は，Floquet 変換を用いて定点加振を受ける無限軌道の定常応答解析を，剛基礎に離散支持され凹凸を設定したレールと，走行車輪の時刻歴応答解析により求めた輪重スペクトルの積により求める手法を構築した．走行車輪の時刻歴応答は，車輪・レール間凹凸に依存するため，本来軌道の変位応答の期待値は，複数の凹凸に対する解より求めることとなる．既往の研究 [2] では，時刻歴解析よりレール振動加速度の期待値を求める手法を構成した．本研究では車輪・レール間凹凸が所定の距離相関を有する場合を対象に，二車輪走行時における無限長レールの振動加速度期待値の導出方法について検討する．

2　解析手法

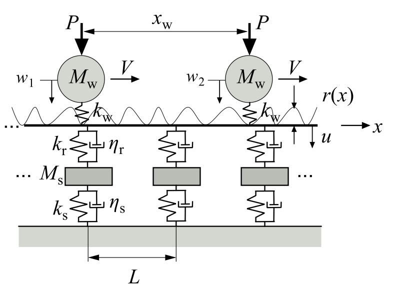

図 1　車輪・軌道連成系のモデル化

図 1 に示す任意の凹凸 $r(x)$ を有する車輪･無限軌道連成系を対象とする．**図 1** において，レールは無限長 Timoshenko ばりで表現し，まくらぎ間隔 L で離散支持されているものとする．レール長手方向の座標を x とし，鉛直たわみを u とする．レール・まくらぎ間およびまくらぎ・道床間には，ばね定数 k_r，k_s，loss factor η_r，η_r の軌道パッドとまくらぎ下パッドが装着されているものとする．なお，周波数域の解析においては，パッドを複素剛性 $k_e = k(1 + i\eta)$ により表す．車輪は一定速度 V で走行する質量 M の質点で与え，後・前輪の鉛直変位を時刻 t の関数として，$w_1(t)$，$w_2(t)$ と定義する．まくらぎ質量を M_s，静的輪重を P，二車輪間距離 (軸距) を x_w とする．

レールの運動方程式は次式で与えられる．

$$
\begin{aligned}
&GAK\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi - \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} F_{sj}(t)\delta(x - jL) \\
&\quad = F_1(t)\delta(x - Vt) + F_2(t)\delta(x - x_w - Vt)\ , \qquad (1) \\
&GAK\left(\psi - \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \rho I\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - EI\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0
\end{aligned}
$$

ここで，ψ はレール断面回転角，G はせん断弾性係数，A はレール断面積，K はせん断係数，ρ は密度，I は断面二次モーメント，E は弾性係数である．また，F_{sj} は j 番支持点からレールに作用する力であり，その作用位置を $x = jL$ とする．F_1，F_2 は後輪および前輪とレール間に作用する接触力である．なお，時刻 t における後輪と前輪位置をそれぞれ $x = Vt$，$x = x_w + Vt$ とする．

式 (1) を Floquet 変換し，さらに時刻 t に関して Fourier 変換すると，次式を得る．

$$
\begin{aligned}
&GAK\frac{\partial}{\partial x}\left(\tilde{\hat{\psi}} - \frac{\partial \tilde{\hat{u}}}{\partial x}\right) - \rho A\omega^2\tilde{\hat{u}} + k_e\tilde{\hat{u}}\delta_L(x) \\
&\quad = \frac{1}{V}\tilde{F}_1\left(\frac{\tilde{x}}{V}\right)\ e^{-i\frac{\omega}{V}\tilde{x}} + \frac{1}{V}\tilde{F}_2\left(\frac{\tilde{x} - x_w}{V}\right)\ e^{-i\frac{\omega}{V}(\tilde{x} - x_w)}\ , \qquad (2) \\
&GAK\left(\tilde{\hat{\psi}} - \frac{\partial \tilde{\hat{u}}}{\partial x}\right) - \rho I\omega^2\hat{\psi} - EI\frac{\partial^2 \tilde{\hat{\psi}}}{\partial x^2} = 0
\end{aligned}
$$

ここで，($\tilde{\ }$) は Floquet 変換，($\hat{\ }$) は Fourier 変換，ω は円振動数，δ_L は周期 L のデルタ関数である．なお，時間 t に関する Fourier 変換は次式で定義する．

$$
\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt \qquad (3)
$$

車輪・レール間接触力 F_1，F_2 は，次式で与えられる．

$$
\begin{aligned}
&\tilde{F}_1\left(\frac{\tilde{x}}{V}, \kappa\right) = k_w\left\{\tilde{u}_{w1} - \tilde{u}\left(\tilde{x}, \frac{\tilde{x}}{V}, \kappa\right) + \tilde{r}\right\} \\
&\tilde{F}_2\left(\frac{\tilde{x} - x_w}{V}, \kappa\right) = k_w\left\{\tilde{u}_{w2} - \tilde{u}\left(\tilde{x}, \frac{\tilde{x} - x_w}{V}, \kappa\right) + \tilde{r}\right\} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

車輪の運動方程式は，次式で与えられる．

$$
\begin{aligned}
MV^2\frac{d^2\tilde{u}_{w1}}{dx^2} &= -\tilde{F}_1 + \tilde{P} \\
MV^2\frac{d^2\tilde{u}_{w2}}{dx^2} &= -\tilde{F}_2 + \tilde{P}
\end{aligned} \tag{5}
$$

ここで，各 Floquet 変換を次の Fourier 級数展開 [3] で与える．

$$
\begin{aligned}
\tilde{\tilde{u}}(\tilde{x},\omega,\kappa) &= \sum_n a_n(\omega,\kappa)e^{-i\left(\frac{2n\pi}{L}+\kappa\right)\tilde{x}} \\
\tilde{F}_j\left(\frac{\tilde{x}}{V},\kappa\right) &= \sum_n f_{jn}(\kappa)e^{-i\left(\frac{2n\pi}{L}+\kappa\right)\tilde{x}} \\
\tilde{u}_{wj}(\tilde{x},\kappa) &= \sum_n b_{jn}(\kappa)e^{-i\left(\frac{2n\pi}{L}+\kappa\right)\tilde{x}} \\
\tilde{r}(\tilde{x},\kappa) &= \sum_n \tilde{r}_n(\kappa)e^{-i\left(\frac{2n\pi}{L}+\kappa\right)\tilde{x}} \\
\tilde{P}(\kappa) &= P\frac{2\pi}{L}\tilde{\delta}(\kappa) = P\frac{2\pi}{L}\tilde{\delta}(\kappa)e^{i\kappa(\tilde{x}-x_w)} \\
&= \sum_n P_n e^{-i\left(\frac{2n\pi}{L}+\kappa\right)(\tilde{x}-x_w)} \\
P_0 &= P\frac{2\pi}{L}\tilde{\delta}(\kappa) \ \ , \ P_n = 0 \ (n \neq 0)
\end{aligned} \tag{6}
$$

以上の準備の下，式 (2) の運動方程式に式 (6) を代入すると，次式を得る．

$$
\begin{aligned}
X_m a_{nm} &+ \frac{k_e}{L}z_n \\
&= \frac{1}{V}\left\{f_{1m}\left(\kappa-\frac{\omega}{V}\right) + f_{2m}\left(\kappa-\frac{\omega}{V}\right)\ e^{i\left(\frac{2n\pi}{L}+\kappa\right)x_w}\right\} \\
X_m &= EI\left(\frac{2m\pi}{L}+\kappa\right)^4 - \rho A\omega^2 \\
z_n &= \sum_n a_n
\end{aligned} \tag{7}
$$

式 (7) を z_n について解くと次式を得る．

$$
z_n = \frac{1}{VX_n}\frac{1}{1+\frac{k_e}{L}\sum_l \frac{1}{X_l}} \tag{8}
$$

すると，式 (7) より a_{nm} は次式で与えられる．

$$
a_{nm} = \frac{1}{VX_n}\left(\delta_{nm} - \frac{1}{X_m}\frac{1}{\frac{L}{k_e}+\sum_l \frac{1}{X_l}}\right) \tag{9}
$$

$u(x,\frac{x}{V})$ は次の逆 Fourier 変換で与えられる．

$$
u\left(x,\frac{x}{V}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{u}(x,\omega)\ e^{i\frac{\omega}{V}x}\ d\omega \tag{10}
$$

すると，$u(x,\frac{x}{V})$ の Floquet 変換 $\tilde{u}(\tilde{x},\frac{\tilde{x}}{V},\kappa)$ は次式で与えられる．

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}(\tilde{x},\frac{\tilde{x}}{V},\kappa) &= \sum_n e^{-i\left(\frac{2n\pi}{L}+\kappa\right)\tilde{x}}\left(\sum_m A_{nm}(0)f_{1m}(\kappa)\right) \\
&+ \sum_n e^{-i\left(\frac{2n\pi}{L}+\kappa\right)\tilde{x}}\left(\sum_m A_{nm}\left(\frac{x_w}{V}\right)f_{2m}(\kappa)e^{i\left(\frac{2m\pi}{L}+\kappa\right)x_w}\right) \\
A_{nm}(\alpha) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}a_{nm}\left(\omega,\kappa+\frac{\omega}{V}\right)e^{i\alpha\omega}\ d\omega
\end{aligned} \tag{11}
$$

同様に，$\tilde{u}(\tilde{x},\frac{\tilde{x}-x_w}{V},\kappa)$ を求めると次式のようになる．

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}(\tilde{x},\frac{\tilde{x}-x_w}{V},\kappa) &= \sum_n e^{-i\left(\frac{2n\pi}{L}+\kappa\right)\tilde{x}}\left(\sum_m A_{nm}\left(\frac{-x_w}{V}\right)f_{1m}(\kappa)\right) \\
&+ \sum_n e^{-i\left(\frac{2n\pi}{L}+\kappa\right)\tilde{x}}\left(\sum_m A_{nm}(0)f_{2m}(\kappa)e^{i\left(\frac{2m\pi}{L}+\kappa\right)x_w}\right)
\end{aligned} \tag{12}
$$

式 (5) に式 (6) を代入して次式を得る．

$$
\begin{aligned}
b_{1n}(\kappa) &= \frac{1}{MV^2\left(\frac{2n\pi}{L}+\kappa\right)}(f_{1n}(\kappa)-P_n) \\
b_{2n}(\kappa) &= \frac{1}{MV^2\left(\frac{2n\pi}{L}+\kappa\right)^2}(f_{2n}(\kappa)-P_n)
\end{aligned} \tag{13}
$$

以上より，式 (2) に式 (11)〜(13) を代入して連立すると，最終的に次の行列表現を得る．

$$
[S(\kappa)]\{f(\kappa)\} = [R(\kappa)]\{\tilde{r}(\kappa)\} - k_w\{P'\} \tag{14}
$$

ここで，$\{f(\kappa)\}$ は，各車輪の作用の展開係数を並べたベクトル，$\{\tilde{r}(\kappa)\}$ はレール凹凸を示すベクトル，$[S(\kappa)]$，$[R(\kappa)]$ はそれぞれに対応する係数である．$\{P'\}$ は，各車輪に作用する静的輪重に対応するベクトルである．

$u(0,t)$ の Fourier 変換 $\hat{u}(0,\omega)$ は $\tilde{\hat{u}}(0,\omega,\kappa)$ の逆 Floquet 変換により求めることができる．特に，$\tilde{\hat{u}}(0,\omega,\kappa) = z(\omega,\kappa)$ であるので，$\hat{u}(0,\omega)$ は z の逆 Floquet 変換により求めることができる．よって，$\hat{u}(0,\omega)$ は次式で与えられる．

$$
\begin{aligned}
\hat{u}(0,\omega) &= \frac{L}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{L}} z(\omega,\kappa)\,d\kappa \\
&= \frac{L}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{L}} \frac{1}{V\tilde{R}(\omega,\kappa)}[T(\omega,\kappa)]\left\{f\left(\kappa+\frac{\omega}{V}\right)\right\}d\kappa \\
\tilde{R}(\omega,\kappa) &= 1 + \frac{k_e}{L}\sum_l \frac{1}{X_l(\omega,\kappa)}
\end{aligned} \tag{15}
$$

ここで，$[T(\omega,\kappa)]$ は $\left\{f\left(\kappa+\frac{\omega}{V}\right)\right\}$ に対応する係数である．式 (15) の $\left\{f\left(\kappa+\frac{\omega}{V}\right)\right\}$ に式 (14) を代入して，まとめると次式のようになる．

$$
\begin{aligned}
\hat{u}(0,\omega) &= \frac{L}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{L}}[\alpha(\omega,\kappa)]\left\{\tilde{r}\left(\kappa-\frac{\omega}{V}\right)\right\}d\kappa - \beta(\omega)P \\
[\alpha(\omega,\kappa)] &= \frac{1}{V\tilde{R}(\omega,\kappa)}[T(\omega,\kappa)]\left[S^{-1}R\left(\kappa-\frac{\omega}{V}\right)\right] \\
\beta(\omega) &= \frac{k_w}{V\tilde{R}(\omega,\frac{\omega}{V})}\left[T\left(\omega,\frac{\omega}{V}\right)\right][S^{-1}(0)]\{I\}
\end{aligned} \tag{16}
$$

ここで，$\{I\}$ は f_{10}，f_{20} に対応する成分が 1，他がゼロのベクトルである．以上より，レールたわみのエネルギースペクトル密度の期待値 $E(|\hat{u}|^2)$ は次式で与えられる．

$$
\begin{aligned}
E(|\hat{u}|^2) &= \frac{1}{2\pi}\sum_n\int_0^{\frac{2\pi}{L}} G\left(\frac{2n\pi}{L}+\kappa-\frac{\omega}{V}\right)|\alpha_n(\omega,\kappa)|^2\,d\kappa \\
&\quad + P^2|\beta(\omega)|^2
\end{aligned} \tag{17}
$$

ここで，G はレール凹凸のパワースペクトル密度である．右辺第一項はレール・車輪間凹凸による振動成分，第二項は静的輪重 P による振動成分 (パラメータ加振) であり，両者の影響を分離して評価できることが分かる．

3　解析条件

レールは 50kgN レールを想定し，EI=4.0382MN/m^2，GAK=168.3MN，ρA=50.47kg，ρI=0.1544kgm とした．まくらぎ間隔 L=0.6m，静的輪重 P=70kN，車輪走行速度 V=30m/s，軌道パッド剛性 k_r=83MN/m，まくらぎ下パッド剛性 k_s=10MN/m，まくらぎ質量 M_s=100kg，車輪質量 M_w=600kg，車輪・レール間ばね定数 k_w=1.5GN/m，二車輪間距離 x_w=2.1m を基本設定とし，k_r，k_s，M_s は値を適宜変えて，それらが期待値に及ぼす影響を調べた．軌道パッドの loss factor $\eta_r = 0.14$，$\eta_s = 0.14$ と設定した．また，レール凹凸の距離相関を文献[4] より，28.44× $10^{-7}/k^4$ m^3 で設定した．

4　解析結果

4.1　パラメータ加振の影響

レール定点加速度エネルギースペクトル密度の期待値を，静的輪重のみ評価した解析と，レール凹凸のみ評価した解析とともに**図 2** に示す．なお，軌道の条件は前述の基本設定とした．静的輪重の影響のみとした結果とは，20Hz 以下の低周波数域で一致が見られ，この周波数域はレール凹凸の影響が無視できることが分かる．逆に，それより高い周波数域では，レール凹凸を考慮した結果と一致しており，高周波数域はその影響が支配的であることが分かる．

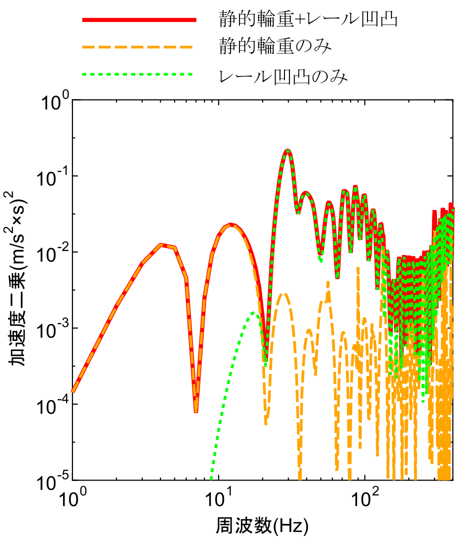

図 2　静的輪重およびレール凹凸の影響

4.2　一車輪モデルとの比較

二車輪走行と一車輪走行との比較を行った．また，一車輪走行時のレール振動加速度を単純に重ね合わせた結果も求めた．この場合，加速度二乗は次式で与えられる．

$$a'^2 = 2\left(1 + \cos\frac{x_w}{V}\omega\right)a^2 \tag{18}$$

ここで，a^2 は一車輪走行で得られる期待値である．

図 3 より，一車輪応答の重ね合わせと，二車輪走行とは比較的良好な一致を示している．特に，30Hz 以下ではほぼ完全一致しており，二車輪走行において，前後車輪間の相互作用が無視できることが分かる．

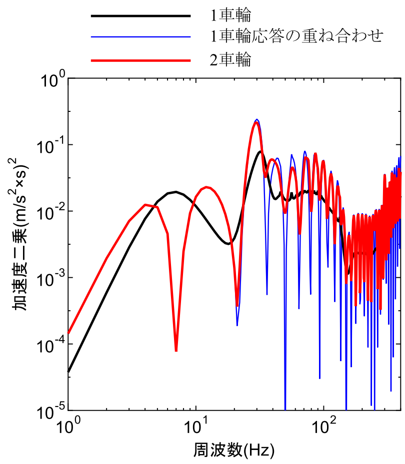

図 3　一車輪走行と二車輪走行の比較

4.3　軌道パッド剛性 k_r の影響

k_r=83MN/m，および 100MN/m と設定した．**図 4** より，低周波数域においては，パッドによる応答の差は出ていないが，100Hz より高い周波数域で，応答に差が出ていることが分かる．**図 5** の分散曲線より，主にレールが振動するモードにおいて差異を生じていることが分かる．

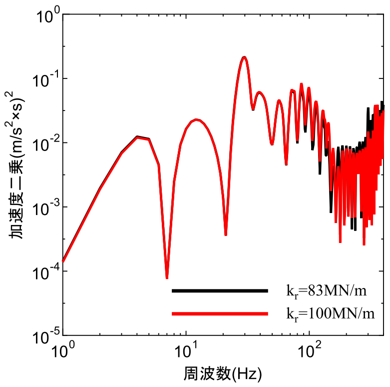

図 4　k_r の影響

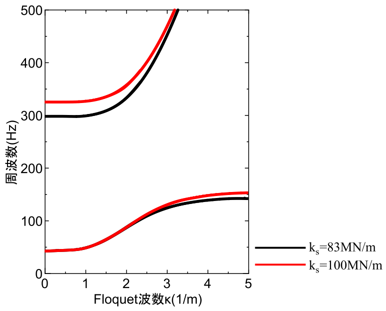

図 **5**　分散曲線が k_r に及ぼす影響

4.4　まくらぎ下パッド剛性 k_s の影響

k_s=7MN/m，10MN/m，17MN/m，25MN/m と設定した．**図 6** より，応答のピークに対応する共振周波数は，ばね定数が低下するにつれて低周波数域側に移動していることが分かる．**図 7** の分散曲線より，主にまくらぎが振動する低周波数域側のモードにおいて，パッド剛性の影響が認められており，**図 6** の特性がこれに連動していることが分かる．

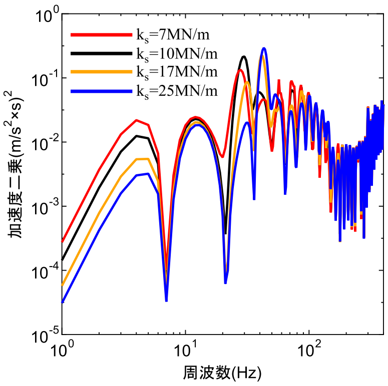

図 **6**　k_s の影響

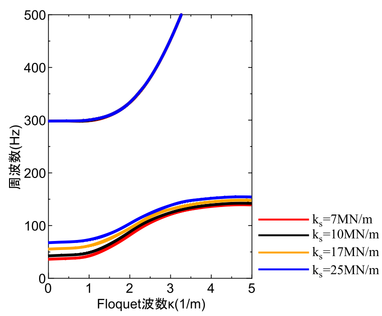

図 **7**　分散曲線が k_s に及ぼす影響

4.5　まくらぎ質量 M_s の影響

M_s=80kg，100kg，120kg と設定した．**図 8** より，100Hz 前後に差が現れているが，**図 9** の分散曲線より，まくらぎが主に振動する低周波数域側のモードが関係していることが分かる．

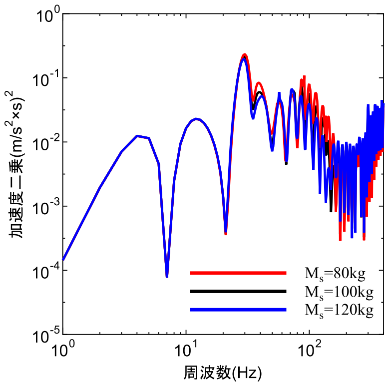

図 **8**　M_s の影響

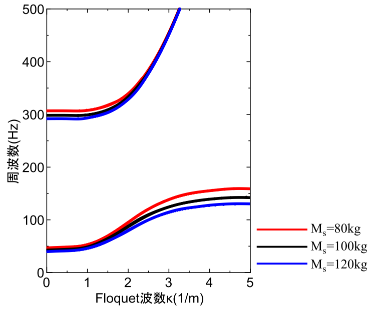

図 **9**　分散曲線が M_s に及ぼす影響

5　おわりに

一車輪走行と二車輪走行を比較した場合，一車輪応答の重ね合わせの結果と，二車輪応答の結果とは 30Hz 以下ではほぼ完全一致しており，当該周波数域では，二車輪走行における前後車輪間の相互作用が無視できることが分かった．また，物性値の違いが期待値に及ぼす影響についても検討を行った．レール振動加速度の期待値は，軌道の分散曲線の特性と対応していることが確認できた．

参考文献

1) 阿部和久，山田高也，山田壮太，古田勝，末原美智子，吉武翔，紅露一寛：地下鉄軌道構造が近接建物内の振動・騒音に及ぼす影響の解析的評価，第 23 回鉄道工学シンポジウム論文集，pp.275-282，2019.
2) 山田壮太，阿部和久，紅露一寛：ランダムな凹凸を有する車輪・レール連成系の振動応答確率解析，令和 2 年度土木学会全国大会第 75 回年次学術講演会
3) Abe, K., Chida, Y., Quinay, P.E.B. and Koro, K.: Dyanamic instability of a wheel moving on a discretely supported infinite rail, J. Sound Vib., 333, pp.3413-3427, 2014.
4) 大竹敏雄，三輪昌弘，青木俊之，千田耕大，五十嵐稔：高速鉄道における輪重変動抑制を目的とした短波長軌道狂い管理手法の研究，土木学会論文集 F4(建設マネジメント)，Vol.71，No.2，pp.83-94，2015.