

# 走行二車輪・離散支持レール連成系が パラメータ共振に及ぼす影響

新潟大学大学院自然科学研究科 学生員 中山 智晴  
 新潟大学工学部社会基盤工学プログラム 正会員 阿部 和久  
 新潟大学工学部社会基盤工学プログラム 正会員 紅露 一寛

## 1 はじめに

鉄道軌道のレールは、まくらぎにより離散支持されているため、走行車輪の支持剛性が周期的に変動することとなる。その結果、レール・車輪間に凹凸が存在しなくても、振動が発生し、これをパラメータ加振という。また、車輪・軌道連成系の共振周波数とまくらぎ2区間通過周波数とが一致する走行速度近傍では、系の減衰が小さい場合に応答振幅が次第に増加するパラメータ共振、またはパラメータ励振と呼ばれる不安定振動が発生する可能性がある。

著書<sup>1)</sup>は、車輪質量やレールのモデル化などが不安定速度域に及ぼす影響について検討した。また、文献<sup>2)</sup>では、レール支持部の減衰やレール軸力が安定性に及ぼす影響について調べた。しかし、これまでの検討では、1車輪のみを考慮している。一方、1台車における前後2車輪の間隔(軸距)は2.0~3.0m程度であり、それらの連成効果は必ずしも無視できず、安定性にも影響する可能性がある。そこで、本研究では、2車輪系を対象に解析解を構成し、その連成効果が不安定速度域等に及ぼす影響について検討する。

## 2 解析手法

### 2.1 軌道の準定常応答解

図-1に示す車輪・軌道系を対象とする。車輪は一定速度  $V$  で走行する質量  $M$  の質点で表し、輪距を  $x_w$ 、各車輪変位を  $w_1, w_2$  とする。レールは Timoshenko ばりでモデル化し、レールたわみを  $u$ 、軌道方向座標を  $x$  とする。また、レールは直結軌道を対象とし、等間隔  $L$  で配置されたバネ定数  $k_r$  の軌道パッドにより離散支持されており、車輪・

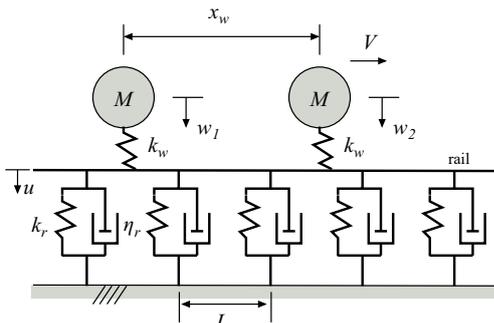


図1 解析モデル

レール間の接触バネ剛性を  $k_w$  とする。なお、周波数域の解析においては、軌道パッドを複素剛性  $k_e = k_r(1 + i\eta_r)$  により表す。ここで  $\eta_r$  は loss factor であり、周波数によらず一定値で与えるものとする。

レールの運動方程式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} GAK \frac{\partial}{\partial x} \left( \psi - \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} F_{sj}(t) \delta(x - jL) \\ = F_1(t) \delta(x - Vt) + F_2(t) \delta(x - x_w - Vt) \\ GAK \left( \psi - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $\psi$  はレール断面回転角、 $G, K, E, I, A, \rho$  はそれぞれせん断弾性係数、せん断係数、ヤング率、断面二次モーメント、断面積、および密度である。また、 $F_{sj}$  は  $j$  番支持点からレールに作用する反力であり、その作用位置を  $x = jL$  とする。 $F_1, F_2$  は後輪及び前輪とレール間に作用する接触力である。なお時刻  $t$  における後輪と前輪位置は、それぞれ  $x = Vt, x = x_w + Vt$  で与えられているものとする。

式(1)に時間に関する Fourier 変換を適用して次式を得る。

$$\begin{aligned} GAK \frac{\partial}{\partial x} \left( \hat{\psi} - \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right) - \rho A \omega^2 \hat{u} + k_0 \hat{u} \delta_L \\ = \frac{1}{V} F_1 \left( \frac{x}{V} \right) e^{-i\omega \frac{x}{V}} + \frac{1}{V} F_2 \left( \frac{x - x_w}{V} \right) e^{-i\omega \frac{x - x_w}{V}} \quad (2) \\ GAK \left( \hat{\psi} - \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right) \rho I \omega^2 \hat{\psi} - EI \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} = 0 \end{aligned}$$

( $\cdot$ ) は Fourier 変換、 $\omega$  は円振動数、 $\delta_L$  は周期  $L$  のデルタ関数である。なお、時間に関する Fourier 変換は次式で定義する。

$$\hat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (3)$$

また、 $\delta_L$  はデルタ関数  $\delta$  をまくらぎ間隔  $L$  で配置して得られる以下のデルタ関数である。

$$\delta_L(x) := \sum_j \delta(x - jL) \quad (4)$$

パラメータ励振は、まくらぎ2区間の周期に支配される。よって、車輪・レール間の接触力を周期長  $2L$  を基準とし

て、次式のような準定常解で表現する。

$$\begin{aligned} F_j \left( t + \frac{2L}{V} \right) &= e^{i\frac{2L}{V}\lambda} F_j(t) \\ \hat{u}(x+2L, \omega) &= e^{i\frac{2L}{V}(\lambda-\omega)} \hat{u}(x, \omega) \\ \hat{\psi}(x+2L, \omega) &= e^{i\frac{2L}{V}(\lambda-\omega)} \hat{\psi}(x, \omega) \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 $\lambda$  は円振動数の次元を持つ複素固有値である。 $\lambda = 0$  の時定常解となり、虚部が負で与えられる時不安定解となる。式 (5) をみたく様に、 $F_j$ ,  $\hat{u}$ ,  $\hat{\psi}$  を次式により Fourier 級数展開する。

$$\begin{aligned} F_j(t) &= \sum_{n \neq 0} F_{j,n} e^{i\left(\frac{n\pi}{L}V + \lambda\right)t} \\ \hat{u}_{1,n} &= \sum_m a_m^n(\omega) e^{i\left(\frac{m\pi}{L} + \frac{\lambda-\omega}{V}\right)x} \\ \hat{\psi}_{1,n} &= \sum_m b_m^n(\omega) e^{i\left(\frac{m\pi}{L} + \frac{\lambda-\omega}{V}\right)x} \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 $F_{j,n}$ ,  $a_m^n$ ,  $b_m^n$  は Fourier 係数である。また、 $\hat{u}_{i,n}$ ,  $\hat{\psi}_{i,n}$  は  $F_{j,m} = \delta_{ij}\delta_{nm}$  の場合に対する式 (2) の解である。

式 (2) における  $\hat{u}_{1,n}\delta_L$  は次式のように変形できる。

$$\begin{aligned} \hat{u}_{1,n}\delta_L &= \frac{Z_{on}n}{L} \sum_m e^{i(z_{2m-1}-\omega/V)x} + \frac{Z_{en}n}{L} \sum_m e^{i(z_{2m}-\omega/V)x} \\ Z_{on} &:= \sum_m a_{n,2m-1}, \quad Z_{en} := \sum_m a_{n,2m} \end{aligned} \quad (7)$$

式 (6), 式 (7) を式 (2) に代入して、 $b_{n,m}$  を消去し、さらに  $Z_{on}$ ,  $Z_{en}$  がそれぞれ  $a_{n,2m-1}$ ,  $a_{n,2m}$  の総和であることに着目し、両辺の  $m$  に関する総和をとり、 $Z_{on}$ ,  $Z_{en}$  を消去することで次式を得る。

$$\begin{aligned} a_{n,2m-1} &= \begin{cases} \frac{1}{VX_{2m-1}} [\delta_{n,2m-1} - \frac{1}{X_n(\frac{L}{k_e} + \sum_l \frac{1}{X_{2l-1}})}] & (n: \text{odd}) \\ 0 & (n: \text{even}) \end{cases} \\ a_{n,2m} &= \begin{cases} \frac{1}{VX_{2m}} [\delta_{n,2m} - \frac{1}{X_n(\frac{L}{k_e} + \sum_l \frac{1}{X_{2l}})}] & (n: \text{odd}) \\ 0 & (n: \text{even}) \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

以上より  $a_{n,2m-1}$ ,  $a_{n,2m}$  が求められると、式 (6) の逆 Fourier 変換より、レールたわみ応答は次式で与えられる。

$$u(x, t) = \sum_{n \neq 0} \{F_{1,n}u_{1,n}(x, t) + F_{2,n}u_{2,n}(x, t)\} \quad (9)$$

## 2.2 車輪応答

$j$  番車輪の応答は次式で与えられる。

$$w_j(t) = \sum_{n \neq 0} \frac{F_{j,n}}{M \left(\frac{n\pi}{L}V + \lambda\right)^2} e^{i\left(\frac{n\pi}{L}V + \lambda\right)t} \quad (10)$$

## 2.3 車輪レール間の接触力

各車輪とレールとの接触力は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} F_1(t) &= k_w \{w_1(t) - u(Vt, t)\} \\ F_2(t) &= k_w \{w_2(t) - u(Vt + x_w, t)\} \end{aligned} \quad (11)$$

## 2.4 不安定解析

式 (6), (9), (10), を式 (11) に代入すると無限連立方程式を得る。 $\{\mathbf{F}\}$  に関する係数行列を  $[\mathbf{M}]$  とすると、次式を得る。

$$[\mathbf{M}_o]\{\mathbf{F}_o\} = 0, \quad [\mathbf{M}_e]\{\mathbf{F}_e\} = 0 \quad (12)$$

$[\mathbf{M}_o]$ ,  $\{\mathbf{F}_o\}$ ,  $[\mathbf{M}_e]$ ,  $\{\mathbf{F}_e\}$  はそれぞれ、奇数成分および偶数成分から成る係数行列と接触力係数ベクトルである。 $\{F\} \neq 0$  より、連成モードに対して次式を得る。

$$\det[\mathbf{M}_o] = 0, \quad \det[\mathbf{M}_e] = 0 \quad (13)$$

準定常モードは、安定・不安定に関わらず式 (12) のいずれかを満たす。そこで行列を有限サイズで打ち切り、式 (13) を与える走行速度  $V$  と固有値  $\lambda$  の関係を数値的に求める。なお、当該非線形固有値問題の求解には、Block-SS 法<sup>3)4)</sup>を用いた。

## 3 解析条件

60kg レールを想定し、曲げ剛性  $EI=6.37\text{MNm}^2$ , せん断に関する係数  $GAK=209\text{MNm}^2$ ,  $\rho A=60.8\text{kg/m}$ ,  $\rho I=0.242\text{kgm}$  とした。またレール支持間隔  $L=0.6\text{m}$ , パッド剛性  $k_0=50\text{MN/m}$ , 車輪・レール間接触力  $k_w=2\text{GN/m}$ , とし、車輪質量は  $M=1000\text{kg}$  と設定した。なお軸距  $x_w$  と軌道パッドの loss factor  $\eta_r$  については値を適宜変えてそれらが安定性に及ぼす影響について考える。なお、まくらぎ 2 区間通過周波数  $V/2L$  と、車輪・軌道連成系の共振周波数とが近接する際に得られる不安定モード (1 次モード) が有する不安定速度域の幅に比べて高次モードのそれは無視し得るほどに狭い<sup>1)</sup>。そのため以下では、奇数項方程式により求められる 1 次モードのみを検討対象とする。

$\lambda$  の収束性を確認の上、式 (12) の固有値計算における Fourier 係数の打ち切り項数は  $n = \pm 3$  までとし、2 車輪に対応する  $12 \times 12$  の行列に基づき計算を行った。

## 4 解析結果

### 4.1 1 車輪モデルとの比較

文献<sup>1)</sup>で検討対象とした一車輪モデルでの結果と、本研究における二車輪モデルでの比較を行う。なお、パッドは無減衰とする。上述の軌道構造に対応する無限長 Winkler ばり上に置かれた 1 車輪系の単位調和加振応答を別途求め

たところ、共振周波数は約 51Hz であった。パラメータ共振は、まくらぎ 2 区間通過周波数  $V/2L$  が連成系の共振周波数に概ね一致する走行速度域で発生するので、その値は約 61m/s となる。そこで、 $58\text{m/s} \leq V \leq 64\text{m/s}$  の範囲で走行速度を適宜設定して、式 (12) の固有値  $\lambda$  を求めた。結果を図 2 に示す。前述の通り、 $\lambda$  が負の虚部を持つ速度域で応答は不安定となり、パラメータ共振が発生するが、まくらぎ 2 区間通過周波数が共振周波数に一致する走行速度前後に相当する  $60.6\text{m/s} \leq V \leq 61.2\text{m/s}$  の速度範囲にそれが分布していることが確認できる。

次に、軸距がレール支持間隔  $L$  の整数倍となる  $x_w = 2.4\text{m}$  の 2 車輪モデルに対して得られた  $\lambda$  の分布を図 3 に示す。当該 2 車輪モデルでは、不安定速度域が 2 箇所に分布している。2 車輪・軌道連成系の共振モードには、本来 2 車輪同位相振動と逆位相振動の 2 つが存在すると考えられる。これらの共振周波数を調和加振応答解析により別途求めたところ、同位相振動モードの共振周波数は約 52Hz であり、逆位相モードはそれよりも低く約 50.3Hz であった。これらから推定される不安定速度はそれぞれ 62.4m/s、および 60.4m/s となり、図 3 の二つの不安定速度域を近似している。また、不安定域の中心速度における  $\lambda$  に対する固有ベクトル ( $F_{j,n}$ ) を求め、それらを式 (10) に代入して、車輪変位の固有モード比  $\omega_2(0)/\omega_1(0)$  を計算したところ、低い方の不安定速度では  $\omega_2(0)/\omega_1(0) \approx -1.0$ 、高い方では  $\omega_2(0)/\omega_1(0) \approx 1.0$  となり、それぞれ逆位相と同位相モードを与えていることが確認できた。以上より、当該 2 車輪モデルにおける二つの不安定速度域は同位相と逆位相の共振モードにそれぞれ対応していることが分かった。

#### 4.2 軸距が不安定モードに及ぼす影響

軸距が  $x_w = 2.1\text{m}$  の場合を図 4、 $x_w = 2.25\text{m}$  の場合を図 5、にそれぞれ示す。なお、軌道パッドは無減衰としている。これらの図より、分布形状が軸距によって異なることが確認できる。 $x_w = 2.1\text{m}$  は、レール支持間隔  $L = 0.6\text{m}$  の 3.5 倍に相当する。この場合、2 車輪のうち、一方の車輪がレール支持点直上にある時、他方の車輪は支持点間中央（レールスパン中央）に位置する。仮にレールスパン中央で車輪変位が最大になるものとする、レール支持点での変位はほぼ 0 になる。よって当該振動では、2 車輪間の位相が  $\pi/2$  ずれる。なお、2 車輪系では本来モードは二つ存在するので、位相差が  $\pi/2$  と  $-\pi/2$  の二つがこれらに対応するものと推測される。そこで、図 4 に示した不安定域の中心速度における二つの複素固有値（実部が正と負の二つ）について、式 (11) の車輪変位の比を求めたところ、実

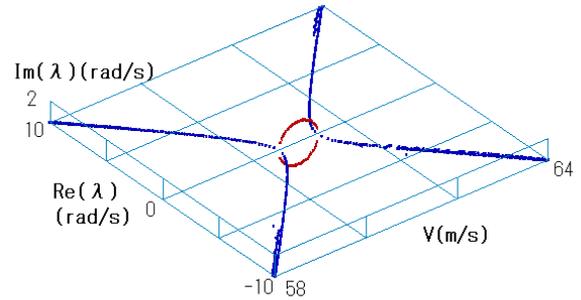


図 2 1 車輪・軌道連成系における固有値  $\lambda$  の分布

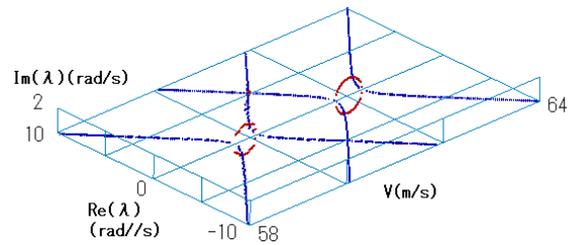


図 3 2 車輪・軌道連成系における固有値  $\lambda$  の分布  $x_w = 2.4\text{m}$

部が正の  $\lambda$  において、 $\omega_2(0)/\omega_1(0) \approx i$ 、実部が負の  $\lambda$  において、 $\omega_2(0)/\omega_1(0) \approx -i$  となっており、それぞれ  $\pi/2$  と  $-\pi/2$  の位相差を持つことが確認できた。また、本結果より軸距がレール支持間隔の整数倍となる  $x_w = 2.4\text{m}$  の場合、前後車輪が同期してレール支持部を通過することから、同位相と逆位相のモードが表れていたと理解することができる。また、 $x_w = 2.25\text{m}$  の場合には、それらのモードが混合したモードを現したと推測できる。

#### 4.3 減衰の影響

2.4 m の軸距に対し、軌道パッドの loss factor  $\eta_r$  を 0.014 に設定した場合に得られた  $\text{Im}(\lambda)$ - $V$  の分布を図 6、軌道パッドが無減衰に設定した場合に得られた  $\text{Im}(\lambda)$ - $V$  の分布を図 7 に示す。これらの図を比較することにより、減衰導入によって、固有値  $\lambda$  が正の虚数方向に平行移動し、 $\lambda$  の虚部はすべて正值をとり、不安定速度域が完全に消失していることが確認できる。また、図 6 の減衰導入時の分布形状は、図 7 の無減衰時のそれを、正の虚数方向に平行移動したものと概ね一致しており、減衰の導入が固有値 ( $\lambda$ ) の分布形状自体には影響しないことも確認できる。なお、減衰

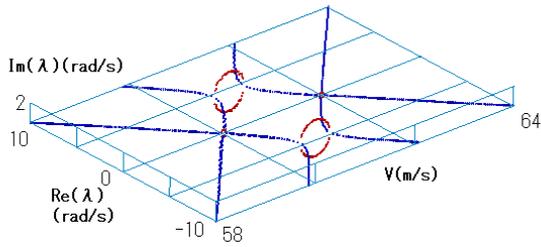


図4 2車輪・軌道連成系における固有値λの分布  $x_w = 2.1\text{m}$

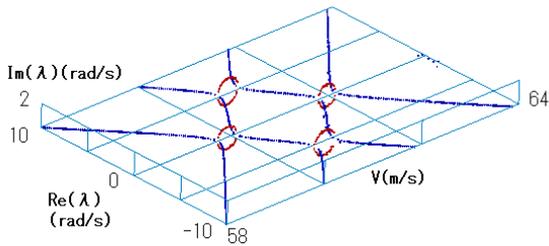


図5 2車輪・軌道連成系における固有値λの分布  $x_w = 2.25\text{m}$

導入による固有値λの正の虚数方向への移動は1車輪モデルにおいても確認されている<sup>2)</sup>。

一方で、現実の軌道においてはパッド類の loss factor は 0.15 程度の値を有するとされている。この値は、本解析で不安定速度域が消滅した  $\eta_r = 0.014$  と比較しても 10 倍程大きく、実軌道においてパラメータ共振が発生する恐れはないことがわかる。また、ここでは台車等における減衰を考慮しておらず、現実にはさらに減衰効果は大きくなるものと考えられる。

## 5 おわりに

走行2車輪と離散支持軌道との連成系におけるパラメータ共振について調べた。前後の車輪間距離が台車の軸距程度である場合、軌道との連成共振モードが二つ存在し、軸距とレール支持間隔との比によって、不安定速度域の1箇所から3箇所まで変化することが分かった。

また、軌道パッドの減衰が安定化に及ぼす効果についても調べた。実際のパッド類が有する減衰の1/10程度の減衰導入により不安定速度域が完全に消滅することから、実軌道においてパラメータ共振が発生する恐れは極めて低いことが確認できた。今後はまくらぎを入れたモデル、台車を

入れたモデルについても検討したい。

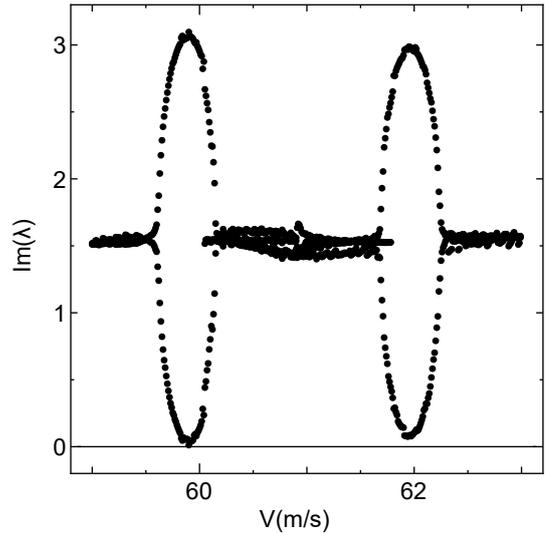


図6  $x_w = 2.4\text{m}$  での固有値虚部  $\text{Im}(\lambda)$  の分布.  $\eta_r = 0.014$ .

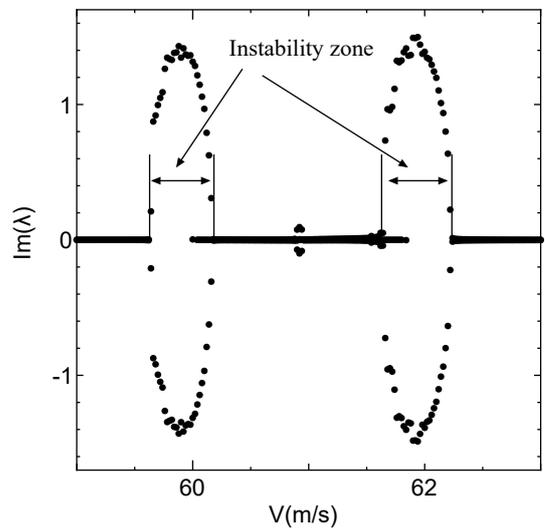


図7  $x_w = 2.4\text{m}$  での固有値虚部  $\text{Im}(\lambda)$  の分布. 無減衰.

## 参考文献

- 1) Abe, K., Chida, Y., Quinay, P.E.B. and Koro, K.: Dynamic instability of a wheel moving on a discretely supported infinite rail, J. Sound Vib., 333, pp.3413-3427, 2014.
- 2) Abe, K., Hosaka, K., Koro, K. and Quinay, P.E.B.: Influence of damping and rail stress on parametric instability of a wheel, Proc. of STECH2015, USB, 2015.
- 3) Asakura, J., Sakurai, T., Tadano, H., Ikegami, T. and Kimura, K.: A numerical method for nonlinear eigenvalue problems using contour integrals, JSIAM Letters, Vol 1, pp.52-55, 2009.
- 4) 阿部和久, 笥 拓哉, 紅露一寛: 等間隔に欠陥が存在する周期場を対象とした効率的分散解析手法, 土木学会論文集 A2, 73, No.2, I.133-I.141, 2017.