河床底面を未知数とした移動床数理解析における数理的特性

新潟大学工学部工学科社会基盤工学プログラム　○大泉　尚紀
新潟大学災害・復興科学研究所　正会員　安田　浩保

1　はじめに

一般に固定床と移動床のそれぞれの水理解析は，河床位を既知数，水位と流速を未知数とし，運動の式と連続の式を連立するなどしてこれらを算定する．しかし，洪水時の実河川の物理を考えると，流速の 10^{-2} から 10^{-3} 程度の非常に緩やかな速度 [1),2)] であるとは言え，河床位は変化を続けていることが知られている．それに加え，現状では洪水時の実河川の河床形状を高い分解能で測定する手法は確立されていない．このため，河床位を既知もしくは変動なしであることを仮定し，水理解析を行うことには検討の余地がある．

河床形状の測定手法が未確立であることと，水面形状が常時視認できることの二つに着目すると，むしろ一般的な水理解析における未知数と既知数を逆転させ，水面を既知とし，底面を未知とする解の算定の方が自然な発想である．水位を既知とするためには，水位と底面に何らかの対応関係の存在が条件となるが，最近の研究において水面と底面の形状が対応することが相次いで示されている．星野ら [3)] は，模型実験であるものの砂州スケールの河床波の形状は水面に表出することを実測した．小関ら [4)] は，微小振幅波理論に基づく水深波長比を用いて河床波上の流れの種別を区分し，砂州河川上の流れは，河床波の形状が水面に表出しやすい浅水流であることを理論的に示した．しかし，現在のところ，水面を既知として河床位を推定する解析は著者の知る限りなく，この解析の精度等も不明である．

本研究では，既往の水理学で行っていた河床形状から水面形状を推定する方法を応用し，水面形状から底面形状を推定できることを示す．

2　理論解析による河床位推定法

水面形の方程式の理論を応用し，河床位を推定する方程式を導出する．

2.1　河床面形の方程式の導出

1 次元不等流解析では，水位を簡便に推定する方法として，以下の方程式を用いて水深の縦断方向の変化を調べる方法が用いられる．

$$\frac{dh}{dx} = i_0 \frac{1-\left(\frac{h_0}{h}\right)^3}{1-\left(\frac{h_c}{h}\right)^3} \tag{1}$$

ここで, h は水深, h_0 は等流水深, h_c は限界水深, i_0 は河床勾配である．これと同様の手法で, 水位勾配 $i_w = -dH/dx$ を与えたときの縦断方向の水深の変化を記述する方程式を導出する．

開水路のベルヌーイの方程式にシェジーの等流流速公式を代入し，エネルギー勾配を水位勾配で近似すると

$$\frac{dh}{dx} = i_w \left(\frac{h_0^3 - h^3}{h_c^3}\right) \tag{2}$$

が得られる．ただし，各物理量は以下とした．

$$i_w = -\frac{dH}{dx}, h_0 = \left(\frac{q^2}{i_w C^2}\right)^{\frac{1}{3}}, h_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{3}$$

また，C はシェジー係数，g は重力加速度，q は単位幅流量である．この方程式を用いて，一定水位勾配における縦断方向の河床形状を推定できる．

2.2　河床を伝播する波動の理論的考察

開水路の水位は水面に生じた微小な変位が上流，もしくは下流に波及すると考えて水面形を決定する．この物理的な性質のため，数理解析においてはこの伝播特性に応じた解の決定方向を定義したうえで計算する．微小な擾乱の上流と下流への伝播は，波動方程式の一種である不定流の方程式から説明できる．本研究では，河床でも同様の手法を用いて解の決定方向を定義することとした．

不定流の運動方程式と連続式は以下の通りである．

$$\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2g}\frac{\partial v^2}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{f'}{R}\frac{v^2}{2g} = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (vh)}{\partial x} = 0 \tag{5}$$

ここで，v は断面平均流速，f' は摩擦損失係数，R は径深である．

流れを等流状態，水位勾配を一定として水深に微小変位を与えたときの伝播特性を理論的に考察する．各変数を以下のように摂動展開する．

$$h = h_0 + \lambda h_1 \tag{6}$$

$$v = v_0 + \lambda v_1 \tag{7}$$

ここで，0 のつく量は等流時の値，1 のつく量は 1 次オーダー成分，λ は微小な摂動パラメータである．等流状態で

表–1 数値計算における境界条件

case	条件	水深勾配
(1)	$h \approx h_c$	$dh/dx \approx i_w(h_0^3/h_c^3 - 1)$
(2)	$h = h_0$	$dh/dx = 0$
(3)	$h < h_0$	$dh/dx = i_w \cdot (-\infty)$

は，摩擦損失勾配と水位勾配がつりあうものと仮定すると，(4) 式の第三項から第五項までの和が 0 となる．(6),(7) 式を (4),(5) 式に代入し λ^2 の項を微小項として無視すると以下のように表される．

$$\frac{1}{g}\frac{\partial v_0}{\partial t} + \frac{1}{2g}\frac{\partial v_0^2}{\partial x} + \lambda\left(\frac{1}{g}\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{1}{g}v_0\frac{\partial v_1}{\partial x}\right) = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial h_0}{\partial t} + \lambda\left(\frac{\partial h_1}{\partial t} + v_0\frac{\partial h_1}{\partial x} + h_0\frac{\partial v_1}{\partial x}\right) = 0 \tag{9}$$

式 (8)(9) の 1 次オーダー成分について連立すると以下の式を得る．

$$\frac{\partial^2 h_1}{\partial t^2} + 2v_0\frac{\partial^2 h_1}{\partial t \partial x} + v_0^2\frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} = 0 \tag{10}$$

式 (10) は双曲型，もしくは波動型の偏微分方程式に分類される．よって，h_1 は以下の波動の一般式を満たす．

$$h_1 = f(x - ct) \tag{11}$$

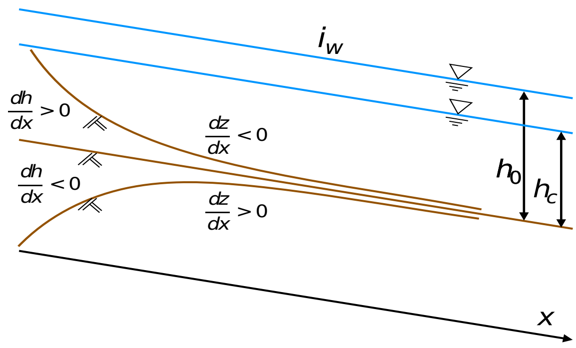
ここで，c は水深の微小変位の波速であり，式 (11) を式 (10) に代入すると以下の波速に関する式を得る．

$$c = v_0 \tag{12}$$

つまり，水位を既知としたときの水深の微小変位は，下流に向かって等流流速に等しい波速で伝播する．河床面形の方程式における計算の方向は上流から下流に向かうべきとの一つの理論的な見解を得た．

2.3　河床面形の方程式を用いて推定される河床形状の考察

本節では，(2) 式で示す河床面形の方程式を用い，河床形状の推定を試みる．解の決定方向は，前節のように上流から下流に向かうと仮定した．境界条件は，流量を一定に，上流端に任意の水深を与える．また，拘束条件として一定勾配の水位を与えた．水位および水面勾配は一定とし，解析を通して不変とする．そして，上流端水深について場合分けを行ったうえで，推定される河床形状を考察する．上流端の場合分けは，式 (2) から h_0 について行う．ただし，今回の考察では一般的な砂州河川上の流れを想定して等流状態で常流となる場合とし，$h_c < h$ の範囲を考える．上流端水深と，河床面形の方程式から導かれる水深の勾配を**表–1** に示す．



図–1 河床形状の縦断断面図

case(1) では，上流端水深が限界水深に限りなく近い場合であり，水深勾配は，$i_w(h_0^3/h_c^3 - 1)$ から始まり，下流に向かうにつれて減少し，やがて $dh/dx = 0$ に漸近すると推測される．

case(2) では，上流端に等流水深を与えた場合であり，水深勾配は 0 になり，常に等流状態を維持すると推測される．

case(3) では，上流端水深が無限大となる場合であり，水深勾配は $i_w \cdot (-\infty)$ から下流に向かうにつれて増加し，やがて $dh/dx = 0$ に漸近すると推測される．

推察した河床形状について，その縦断断面の模式図を**図–1** に示す．このように，河床面形の方程式を用いることで，本研究の仮定の範囲内での上流端における任意の水深に応じてどのような河床形状となるかを推定できる．

3　おわりに

本研究では，河床面形についての方程式を導出し，不定流の運動方程式と連続式から解の決定方向を定義した上で，それらから推定される河床形状について考察を行った．その結果，水面形と同様に河床面形についても推定可能であることを示した．また，本研究における仮定の範囲では，河床面の形状は，上流から下流に向かって決定されることを示した．

今後は，数値計算と模型実験を用いて理論解析の妥当性を検証する予定である．

参考文献

1) G.Seminara, : Fluvial sedimentary patterns, Annu. Rev. Fluid Mech., Vol. 42, pp. 43-66, 2010.

2) 石原道秀，安田浩保：交互砂州の発生・発達過程における底面位の伝播速度式の適用性，土木学会第 23 回応用力学シンポジウム講演概要集，2020

3) 星野剛，安田浩保，倉橋将幸：交互砂州の形成機構の解明に向けた水面と底面の同時計測手法の開発，土木学会論文集 A2(応用力学)，74 巻 1 号，pp.63-pp.74，2018.

4) 小関博司，安田浩保：水深波長比を用いた河床波の統一的区分とその支配水理量，土木学会第 23 回応用力学シンポジウム講演概要集，2020