

# まくらぎ2区間通過周波数域における 共振励起の可能性に関する検討

新潟大学大学院自然科学研究科 学生会員 ○田中 智貴  
新潟大学工学部 正会員 阿部 和久  
新潟大学工学部 正会員 紅露 一寛

## 1 はじめに

車輪走行時の主な振動源は二つ存在する。レール車輪間の凹凸と、レール離散支持による動的等価支持剛性の周期変動である。後者に起因する振動をパラメータ加振と呼ぶ。当該振動は、レール支持点の車輪通過に対応する周波数である「まくらぎ通過周波数」とその高調波成分より構成される。このパラメータ加振の応答は安定なものとなる。一方、動的等価剛性の周期変動に起因する不安定現象としてパラメータ共振がある。車輪・軌道連成系において、まくらぎ通過周波数の1/2の値(まくらぎ2区間通過周波数)と、系の共振周波数が一致する走行速度領域では、減衰が比較的小さい条件下において、パラメータ共振が発生する<sup>1)</sup>。当該振動が発生した場合、振動振幅が時間とともに指数関数的に増大する。また、2車輪系における不安定速度域についての理論的研究では、不安定速度域が同位相、逆位相共振モードに対応して2つ存在することが確認された。また、軸距とまくらぎ間隔の比がある整数 $n$ に対して、 $n$ 倍となるケース、 $n+1/2$ 倍となるケース、これら以外となるケースの3つでは不安定特性が異なることが分かった<sup>2)</sup>。一方で、既往の理論的研究によると、実軌道でパラメータ共振が発生する恐れは低いとされている。これは、軌道パッドが有する減衰下で不安定速度域は消滅するからである<sup>3)</sup>。しかし、新幹線走行時に測定された輪重のパワースペクトル密度(PSD)において、まくらぎ2区間通過周波数と思われる卓越応答が確認されている<sup>4)</sup>。このことから、実軌道ではパラメータ共振が励起されることはないものの、まくらぎ2区間通過周波数が系の共振周波数に近い値をとる場合、卓越応答が発生する可能性があると考えられる。

そこで、本研究では有限要素法に基づき、台車・軌道連成系を対象に時間域連成解析を行う。2車輪系ではなく台車系としているのは、台車枠の存在による2車輪間の連成効果と台車枠・車輪間の減衰効果を考慮し、

通常の軌道系に近い条件とするためである。まず、無減衰下において、台車を不安定速度で走行させ、パラメータ共振の発生について確認する。次に、通常の軌道系が有する程度の減衰下での解析を行う。さらに、車輪・レール間接触モデルをHertz接触モデルでモデル化し、レール頭頂面にランダムな凹凸を導入して、それらが応答に及ぼす影響について検討する。

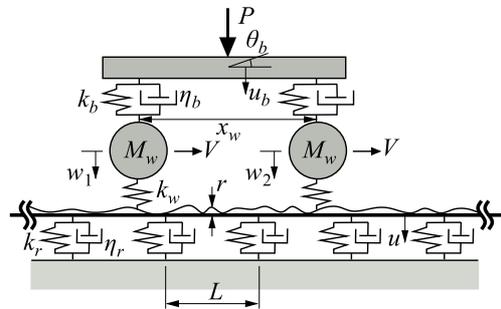


図-1 台車・軌道連成系モデル

## 2 台車・軌道連成解析の概要

### 2.1 連成解析モデル

本研究では、台車・軌道連成系を図-1のようにモデル化する。直結軌道を想定し、まくらぎはモデル化せず、道床は剛体とした。軌道パッドは、線形バネ $k_r$ とダンパー $\eta_r$ で与え、等間隔 $L$ で配置した。レールはTimoshenkoばりでモデル化し、鉛直たわみ $u$ のみ考慮して、TIM7要素で離散化した。台車は、台車枠と軸距 $x_w$ で配置された前後2車輪で構成した。台車枠は質量 $M_b$ 、慣性モーメント $I_b$ の剛体で与え、鉛直変位 $u_b$ とピッチ角 $\theta_b$ で運動を表現する。なお、 $w_1$ 、 $w_2$ をそれぞれ後輪変位、前輪変位とする。台車枠と車輪間は軸ばね $k_b$ と軸ダンパー $\eta_b$ で接続した。台車の走行速度は一定値 $V$ で与える。台車枠の質量とばね下質量による静的作用力を車体重量に加えたものを、台車に作用する鉛直荷重 $P$ により表した。車輪・レール接触に関しては前述した線形ばねで与える場合と、Hertz接触で与える場合の両モデルについて検討する。

## 2.2 解析条件

60 kg レールを想定し、Timoshenko ばりの曲げ剛性を  $6.4\text{MN}\cdot\text{m}^2$ 、せん断弾性係数  $G$  とせん断係数  $K$  および断面積  $A$  の積を  $GKA = 209\text{MN}$ 、単位長さ当たりの質量を  $60.8\text{ kg/m}$ 、レールの断面回転慣性を  $0.242\text{ kg}\cdot\text{m}$  とした。その他の値は表-1、表-2に示す。解析に当たり、各レール支持点間を6要素で分割し、軌道長を80スパンで与えた。時間域解析における時間積分には無条件安定な台形公式を用い、時間増分は  $\Delta t = 4 \times 10^{-4}\text{ s}$  と設定した。

表-1 台車に関する設定値

台車枠質量	$M_b$ (kg)	1500.0
台車の慣性モーメント	$I_b$ ( $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ )	450.0
軸ばね	$k_b$ (MN/m)	1.0
軸ダンパー	$\eta_b$ ( $\text{kN}\cdot\text{s/m}$ )	40.0
ばね下質量	$M_w$ (kg)	1000.0
静的上載荷重	$P$ (kN)	140

表-2 軌道に関する設定値

軌道パッドばね定数	$k_r$ (MN/m)	80.0
台車の慣性モーメント	$\eta_k$ ( $\text{kN}\cdot\text{s/m}$ )	40.0
レール支持間隔	$L$ (m)	0.6

## 3 無減衰系の連成解析

### 3.1 時間域解析による不安定応答の確認

文献<sup>2)</sup>に示した2車輪・軌道連成モデルの解析解に新たに台車枠を追加して、パラメータ共振が発生し得る不安定速度領域を導出した。なお、台車枠、車輪間の軸ダンパーと軌道パッドにおける減衰はゼロとしている。その結果、本理論モデルにおいては、 $V=70.7, 71.6, 72.5\text{ m/s}$ 前後に不安定速度域が現れた。本ケースでは軸距とレール支持間隔の比  $x_w/L = 4.16$ となり、同・逆位相共振周波数とその中間に対応する合計3箇所不安定速度域が現れる<sup>2)</sup>。この不安定速度に基づき無減衰系の時間域連成解析を行った。

不安定速度として、 $V = 70.7\text{ m/s}$ に設定したケースと、安定速度である  $V = 60\text{ m/s}$ に設定したケースにおける後輪変位  $w_1$  の時刻歴をそれぞれ図-2、図-3に示す。図-2では、有限時刻の解析のため応答にうなりのような成分がわずかに認められるものの、 $w_1$  の変

位振動が次第に増幅しており、不安定応答の発生が確認できる。一方、図-3では、振動振幅は概ね一定となっており、安定な応答となっている。また、不安定応答にはまくらぎ2区間通過時間に相当する  $2L/V \approx 0.017\text{ s}$  を1周期とする振動成分の他に、台車の共振周波数の約6Hzと一致する低周波振動の増幅も確認できた。この低周波振動は、計算開始時に静的荷重  $P$  を所定の値まで漸増する過程で誘発されたものと考えられる。

車輪加速度 PSD を図-4に示す。 $V = 70.7\text{ m/s}$  のケースでは、59Hz付近に主要な応答成分が存在している。これはまくらぎ2区間通過周波数  $2L/V = 58.9\text{ Hz}$  に対応しておりパラメータ共振の発生を裏付けている。また、118Hz付近の応答はまくらぎ1区間通過周波数に相当する。一方、 $V = 60\text{ m/s}$  のケースでは、主要な応答成分が100Hzに表れている。これは  $V = 60\text{ m/s}$  におけるまくらぎ1区間通過周波数に相当する。しかし、まくらぎ2区間通過周波数である59Hzには応答成分が認められないため、パラメータ加振による安定な応答であることが推測できる。なお、 $V = 60\text{ m/s}$  のケースでも58.9Hz付近にわずかに応答の存在が認められる。これはパラメータ共振ではなく、単に車輪・軌道連成系の共振によるものと考えられる。

以上より、無減衰な車輪(台車)・軌道連成系では時間域解析によっても特定の走行速度域でパラメータ共振の発生を確認できた。

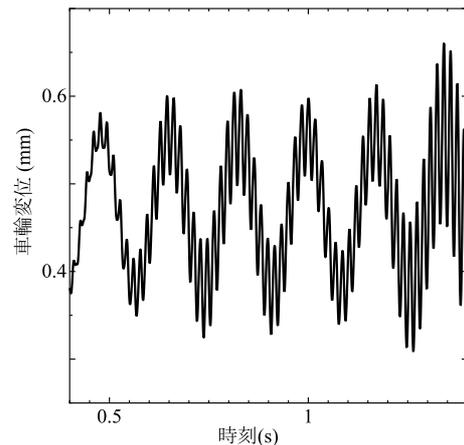


図-2 無減衰系における後輪の変位時刻歴 ( $V=70.7\text{ m/s}$ )

## 4 減衰系の連成解析

### 4.1 連成系の減衰が応答に及ぼす影響

台車軸ダンパーと軌道パッドに表-1と表-2に示した減衰を設定した。不安定速度  $V = 70.7\text{ m/s}$  における

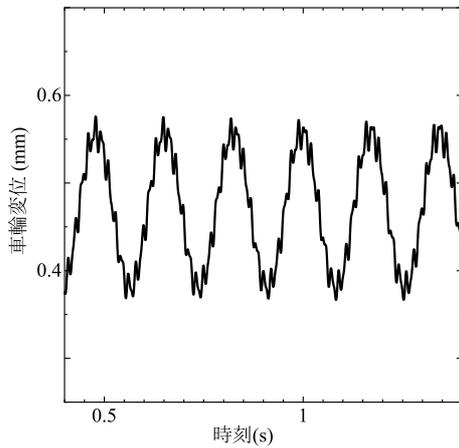


図-3 無減衰系における後輪の変位時刻歴 (V=60m/s)

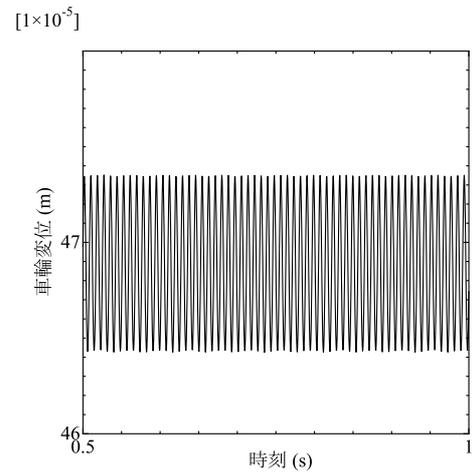


図-5 減衰系における後輪の変位時刻歴 (V=70.7m/s)

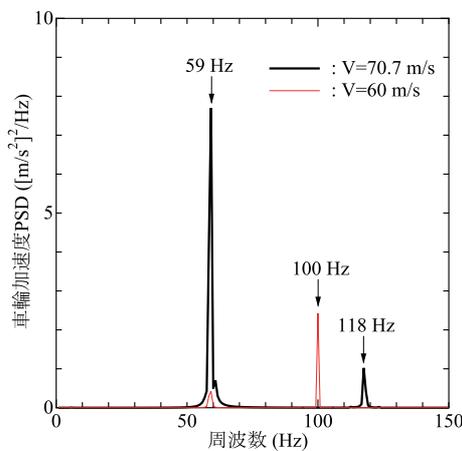


図-4 無減衰系における後輪の加速度 PSD

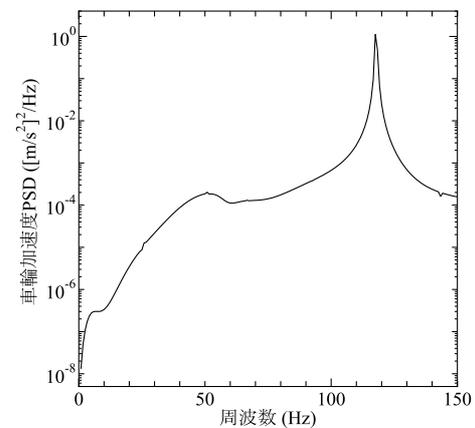


図-6 減衰系における後輪の加速度 PSD(V=70.7m/s)

後輪時刻歴変位を図-5に、後輪加速度 PSD を図-6に示した. 図-5より、車輪変位は一定のまま推移しており、減衰の導入により応答が安定となったことが確認できる. 図-6より、まくらぎ1区間通過周波数が主要な応答成分であり、図-5の応答はパラメータ加振による安定な応答であることがわかる.

#### 4.2 車輪・レール間接触の非線形性が応答に及ぼす影響

これまでは車輪・レール間接触を線形バネで表現した. しかし、車輪踏面とレール頭頂面との接触点近傍を一定な主曲率を有する二つの弾性体で近似する Hertz 接触モデルを用いる方が接触力を適切に評価できると考えられる. この場合、車輪・レール間接触力  $F$  は次式で与えられる.

$$F = \begin{cases} C \cdot \delta^{3/2}, & (\delta \geq 0) \\ 0, & (\delta < 0) \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 $\delta$  は車輪とレールの接触点における鉛直方向の相対変位 (押し込みを正)、 $C$  は車輪踏面とレール頭頂面の主曲率と弾性係数・ポアソン比で定まる定数である. なお、定数  $C$  は  $110\text{GN}/\text{m}^{3/2}$  とした.

式 (2) のように接触力が相対変位に対して非線形性を有する場合、まくらぎ通過周波数とその高調波成分以外にも、まくらぎ2区間通過周波数のような分調波成分の発生も許容される. そこで、本モデルを用いて解析を行った. 図には示していないが、線形バネを用いたケースと比較して、パラメータ共振に関連した顕著な変化は認められなかった.

#### 4.3 レール凹凸が応答に及ぼす影響

実際の軌道では、車輪・レール間に凹凸が存在する. これに起因する振動は、本来パラメータ共振とは独立の現象である. しかし、パラメータ共振は何らかの擾乱により引き起こされるものである. したがって、レール凹凸によりパラメータ共振が励起される可能性があ

る。そこで、レール上に定常ランダムな凹凸を設定して解析を試みた。なお、レール凹凸は次の PSD に基づき設定した。

$$S(k) = \frac{A'}{k^4} \quad (2)$$

ここで、 $k$  は波数、 $A'$  は定数であり、以下の解析では  $A' = 4.54 \times 10^{-7} \text{ m}^{-1}$  とした。なお、式 (3) は文献<sup>5)</sup>の振動解析で用いられているレール凹凸 PSD の経験式を近似したものである。

本解析では式 (3) より作成した 20 種類の凹凸に対して時間域解析を実施し、得られた PSD の平均値を求め、バラツキの低減を図った。

車輪・レール間接触を線形バネ  $k_w$  で設定した場合の結果を図-7 に示す。なお、図-7 には、走行速度  $V=70.7\text{m/s}$  の他に、それより低い安定速度と高い安定速度の例として  $V=60\text{m/s}$  および  $75\text{m/s}$  の合計 3 ケースに対して得られた後輪の輪重 PSD を示した。図-7 では、応答ピーク値の大小関係が明瞭となるように縦軸を線形表示している。何れの走行速度においても、二つの周波数で応答の卓越が認められる。そのうちの一つは  $60\text{Hz}$  付近におけるものである。当該周波数は、前述のとおり車輪・軌道連成系の共振周波数に対応している。また、もう一つの卓越応答は、各走行速度におけるまくらぎ通過周波数と一致しており、パラメータ加振によるものである。パラメータ加振によるピークを除くと、走行速度の増加とともに応答が一様に増大する傾向が確認できる。これは、式 (3) と関連した走行速度に起因する増幅効果と考えられる。もし、 $60\text{Hz}$  付近の卓越応答にパラメータ共振が関与しているならば、 $V=70.7\text{m/s}$  におけるピークが他の走行速度と比べて大きくなると考えられるが、その傾向は認められない。従って、レール凹凸の存在下でも、パラメータ共振に起因するまくらぎ 2 区間通過周波数での応答は励起されないことが分かった。ちなみに、車輪・レール間接触モデルを Hertz 接触モデルに変更した場合でも、同様の結果が得られた。

## 5 おわりに

減衰を有する台車・軌道連成系において、パラメータ共振に起因した応答が卓越する可能性について検討した。まず、無減衰系の時間域連成解析を通してパラメータ共振の発生を確認した。続いて、通常の台車・軌道系が有する程度の減衰を設定し、時間域連成解析を

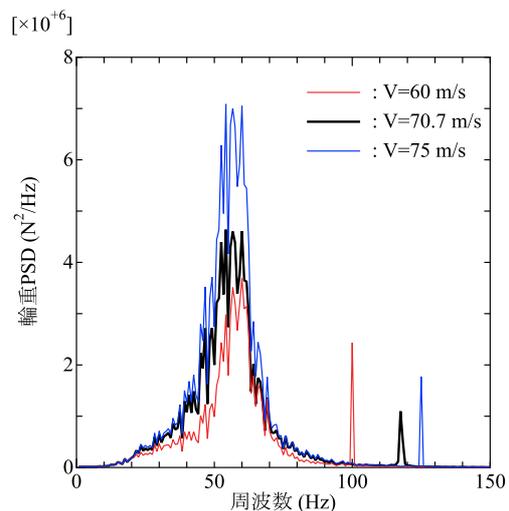


図-7 ランダムなレール凹凸設定時の後輪輪重 PSD(線形ばね:20 ケース平均: $V=60,70.7,75\text{m/s}$ )

実施した。車輪・レール間接触を線形バネで与えた場合と Hertz 接触モデルで与えた場合について検討した結果、何れにおいても、車輪・軌道連成系の共振周波数とまくらぎ 2 区間通過周波数が一致する走行速度付近において、卓越応答は認められなかった。また、レール凹凸存在下での連成解析においては、車輪・軌道系の共振発生は確認できたものの、パラメータ共振に起因する顕著な応答は得られなかった。

## 参考文献

- 1) Abe, K., Chida, Y., Quinay, P.E.B. and Koro, K. : Dynamic instability of wheel moving on discretely supported infinite rail, J. Sound Vib., 333, pp.3413-3427, 2014.
- 2) 阿部 和久, 中山 智晴, 紅露 一寛 : 離散支持レール・走行二車輪連成系のパラメータ不安定性, 土木学会論文集 A2, Vol76, No2, 57-66, 2020.
- 3) Abe, K., Hosaka, K., Koro, K. and Quinay, P.E.B. : Influence of damping and rail stress on parametric instability of a wheel, STECH2015.
- 4) 大竹敏雄, 三輪昌弘, 青木俊之, 千田耕大, 五十嵐稔 : 高速鉄道における輪重変動抑制を目的とした短波長軌道狂い管理手法の研究, 土木学会論文集 F4, Vol71, No.2, 83-94, 2015.
- 5) Gupta, S., Liu, W.F., Degrande, G. and Liu, W.N. : Prediction of vibrations induced by underground railway traffic in Beijing, J. Sound Vib., 310, pp.608-630, 2007.