

離散正弦変換を用いた通り変位の原波形復元法

新潟大学大学院自然科学研究科 学生会員 中川 慧
新潟大学工学部 正会員 阿部 和久
新潟大学工学部 正会員 紅露 一寛

1 はじめに

鉄道軌道のレール継ぎ目部は、軌道破壊や乗り心地の悪化、騒音などにつながり弱点箇所となる。その解決策としてロングレールの導入が挙げられる。しかし、ロングレールはまくらぎにより拘束されるため、中央部が不動区間となり、温度変化によるレール軸力が発生する。特に、夏の高温時において、軌道座屈が発生する可能性が高まる。そのため、ロングレールでは座屈の保守管理を適切に行う必要がある。

鉄道軌道において、軌道座屈温度は、空間方向にばらつきを有する初期通り変位に大きく依存する。そのため、本研究室では初期通り変位と軌道座屈の確率的関係について検討してきた¹⁾。その際に、軌道状態を反映させた数値モデルを用いた。なお、当該解析では、1つの初期通り変位が設定されると、それに対応した座屈温度を求めることが可能である。現在、軌道変位の10m弦正矢データが高密度に測定可能となっている²⁾。これより、通り変位の原波形が復元できれば、上述の解析により座屈を生ずる箇所と温度を予測可能になるものと考えられる。

本研究では、離散正弦変換に基づいた初期通り変位の表現方法の枠組みで、10m弦正矢データからの通り変位波形の復元法を構築し、その有効性について検討する。

2 10m弦正矢について

10m弦正矢は、図-1のように、レールに長さ10mの弦をあて、その中央における弦とレールとの距離により与えられる。

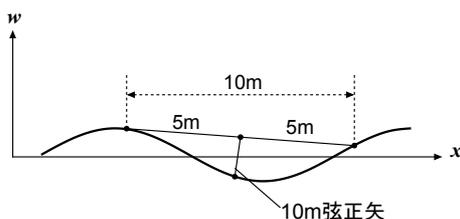


図-1 10m弦正矢

よって、10m弦正矢 $y(x)$ は次式により表すことができる。

$$y(x) = w(x) - \frac{1}{2} \left\{ w \left(x - \frac{l}{2} \right) + w \left(x + \frac{l}{2} \right) \right\} \quad (1)$$

ここで、 w は通り変位、 $l = 10\text{m}$ である。

式(1)をフーリエ変換すると次式を得る。

$$\hat{y}(k) = \left\{ 1 - \cos \left(\frac{kl}{2} \right) \right\} \hat{w}(k) \quad (2)$$

ここで、 k は波数である。

式(2)において $1 - \cos \left(\frac{kl}{2} \right) = 0$ となる次の条件下では $\hat{w}(k)$ を求めることが不可能となる。

$$\lambda = \frac{l}{2n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3)$$

$l = 10\text{m}$ より、波長 λ が $\infty, 5\text{m}, 2.5\text{m}, \dots$ のとき、式(2)より $\hat{w}(k)$ が求めることが不可能となる。特に、測定ノイズ存在下では w の復元精度が低下する。よって、これへの対処が必要となってくる。

3 離散正弦変換

まず、図-2のような $x = 0, L$ で値が0となる離散通り変位データを考える。



図-2 離散通り変位波形

通り変位を表現する関数基底として次の関数を用いる。

$$\bar{g}_j(x) = \sin \left(\frac{\pi}{L} jx \right) \quad (4)$$

このとき、通り変位は展開係数 \hat{w} により次式で表すことができる。

$$w(x) = \sum_j^{\infty} \hat{w}_j \bar{g}_j(x) \quad (5)$$

$0 \leq x \leq L$ に $N + 1$ 個の離散点を等間隔に置き、 $x_i = i\Delta x$ ($\Delta x = L/N$) におけるたわみを $w_i = w(x_i)$ とする。 $i = 1, \dots, N - 1$ に対して、次式が成り立つように \hat{w}_j を定める。

$$w_i = \sum_{j=1}^{N-1} \hat{w}_j g_{ij} \quad (6)$$

$$g_{ij} = g_j(x_i) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sin\left(\frac{\pi}{N} ij\right) \quad (7)$$

よって、 \hat{w}_j は形式的には次のように求めることができる。

$$\hat{w}_i = \sum_{j=1}^{N-1} g_{ij}^{-1} w_j \quad (8)$$

ここで、 g_{ij}^{-1} は次式で与えられる。

$$g_{ij}^{-1} = g_{ij} = \sqrt{\frac{2}{N}} \sin\left(\frac{\pi}{N} ij\right) \quad (9)$$

式 (1) に式 (6),(7) を代入し、計算すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_j g_j(x) \hat{w}_j \\ &- \frac{1}{2} \sum_j \left\{ g_j\left(x - \frac{l}{2}\right) + g_j\left(x + \frac{l}{2}\right) \right\} \hat{w}_j \quad (10) \\ &= \sum_j \left\{ 1 - \cos\left(\frac{l\pi}{2L} j\right) \right\} g_j(x) \hat{w}_j \end{aligned}$$

式 (10) より、 $y_i = y(x_i)$ に対して、次式を得る。

$$y_i = \sum_j \left\{ 1 - \cos\left(\frac{l\pi}{2L} j\right) \right\} g_{ij} \hat{w}_j \quad (11)$$

また、

$$\begin{aligned} [\mathbf{H}] &= [\mathbf{h}_{ij}] \\ h_{ii} &= 1 - \cos\left(\frac{l\pi}{2L} i\right), \quad h_{ij} = 0 (i \neq j) \quad (12) \end{aligned}$$

とおくと、式 (11) は次のように表すことができる。

$$\{\mathbf{y}\} = [\mathbf{GH}]\{\hat{\mathbf{w}}\} \quad (13)$$

$\{\hat{\mathbf{y}}\} = [\mathbf{G}]\{\mathbf{y}\}$ と表せば、次式を得る。

$$\{\hat{\mathbf{y}}\} = [\mathbf{H}]\{\hat{\mathbf{w}}\} \quad (14)$$

よって、次式を得る。

$$\hat{y}_i = \left\{ 1 - \cos\left(\frac{l\pi}{2L} i\right) \right\} \hat{w}_i \quad (15)$$

4 目的関数の設定

原波形の復元方法として離散正弦変換に基づく通り変位表現の下、当初は EM アルゴリズム³⁾に基づいた推定法を構成した。しかし、当該法ではノイズによる精度低下の十分な抑制が困難であったため、推定法を以下のとおり修正した。

ベイズの定理より、次式が成り立つ。

$$p(\hat{\mathbf{w}}|\hat{\mathbf{y}}) \propto p(\hat{\mathbf{y}}|\hat{\mathbf{w}})p(\hat{\mathbf{w}}) \quad (16)$$

ここで、 $p(\hat{\mathbf{w}}|\hat{\mathbf{y}})$ は $\hat{\mathbf{y}}$ が与えられた下での $\hat{\mathbf{w}}$ の条件付き確率である。

式 (15) より、測定データ $\{\hat{\mathbf{y}}\}$ は次の関係を有する。

$$\hat{y}_i = \left\{ 1 - \cos\left(\frac{l\pi}{2L} i\right) \right\} \hat{w}_i + \hat{\varepsilon}_i \quad (17)$$

ここで、 $\hat{\varepsilon}_i$ は y_i の測定ノイズに対応する成分である。

式 (13) より、 $\{\mathbf{y}\}$ と $\{\mathbf{w}\}$ には次の関係が存在する。

$$\{\mathbf{y}\} = [\mathbf{GHG}]\{\hat{\mathbf{w}}\} + \{\boldsymbol{\varepsilon}\}, \quad ([\mathbf{G}]\{\mathbf{w}\} = \{\hat{\mathbf{w}}\}) \quad (18)$$

ここで、 $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ は測定ノイズを成分に持つベクトルである。各成分 ε_i が期待値ゼロ、分散 σ_ε^2 で、互いに独立な Gauss ノイズと仮定する。

式 (17) の $\{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\}$ は次式で与えられる。

$$\{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\} = [\mathbf{G}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} \quad (19)$$

これより、次式を得る。

$$E(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) = [\mathbf{G}]\{E(\boldsymbol{\varepsilon})\} = \{\mathbf{0}\} \quad (20)$$

ここで、 $E(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})$ は $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ の期待値である。

また、次式より、 $\{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\}$ は分散 σ_ε^2 で互いに独立な Gauss ノイズであることが分かる。

$$\begin{aligned} E(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T) &= [\mathbf{G}]E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T)[\mathbf{G}] \\ &= \sigma_\varepsilon^2[\mathbf{GIG}] \\ &= \sigma_\varepsilon^2[\mathbf{I}] \quad (21) \end{aligned}$$

以上より、 $p(\hat{\mathbf{y}}|\hat{\mathbf{w}})$ は、期待値が $\hat{y}_i = \left\{ 1 - \cos\left(\frac{l\pi}{2L} i\right) \right\} \hat{w}_i$ 、分散が σ_ε^2 の互いに独立な Gauss 分布で与えられることがわかる。よって、 $p(\hat{\mathbf{y}}|\hat{\mathbf{w}})$ の指数部は次式で与えられる。

$$-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \|\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{y}}\|^2 \quad (22)$$

次に $p(\hat{w})$ について考える。 w が期待値ゼロ、自己相関関数 $R(x)$ のランダム波形で与えられているものとする、次式を得る。

$$\begin{aligned} E(\mathbf{w}\mathbf{w}^T) &= [\mathbf{C}] \\ c_{ij} &= R(|i-j|\Delta x) \\ c_{ii} &= R(0) = \sigma_w^2 \end{aligned} \quad (23)$$

よって、 $\{\hat{w}\}$ は次の条件を有する。

$$\begin{aligned} E(\hat{\mathbf{w}}) &= [\mathbf{G}]E(\mathbf{w}) = \{\mathbf{0}\} \\ E(\hat{\mathbf{w}}\mathbf{w}^T) &= [\mathbf{G}E(\mathbf{w}\mathbf{w}^T)\mathbf{G}] \\ &= [\mathbf{G}\mathbf{C}\mathbf{G}] \end{aligned} \quad (24)$$

$$(25)$$

以上より、 $p(\hat{w})$ の指数部は次式で与えられる。

$$-\frac{1}{2}(\hat{\mathbf{w}}^T \hat{\mathbf{C}}^{-1} \hat{\mathbf{w}}) \quad (26)$$

式(22)と式(26)より、 $p(\hat{y}|\hat{w})p(\hat{w})$ の指数部は次式で与えられる。

$$-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \|\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{y}}\|^2 - \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{w}}^T \hat{\mathbf{C}}^{-1} \hat{\mathbf{w}}) \quad (27)$$

よって、 $\{\hat{w}\}$ を推定する目的関数 J を以下のように設定する。

$$J = \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \|\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{y}}\|^2 + \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{w}}^T \hat{\mathbf{C}}^{-1} \hat{\mathbf{w}}) \quad (28)$$

本研究では $[\hat{\mathbf{C}}^{-1}]$ を次の対角行列で近似する。

$$[\hat{\mathbf{C}}^{-1}] \doteq \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \sigma_{wi}^{-2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (29)$$

式(29)より、式(28)に最小条件を適用すると次式を得る。

$$\hat{w}_i = \frac{h_i}{h_i^2 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_{wi}^2}} \hat{y} \quad (30)$$

ここで、 $h_i = 1 - \cos(k_i l / 2)$ 、(k_i は離散波数)である。

ハイパーパラメータ $\sigma_\varepsilon^2, \sigma_{wi}^2$ の推定にあたり、MAP推定³⁾を適用すると、多少の計算の後に次式を得る。

$$\begin{aligned} &\left(N - \sum_i \frac{h_i^2}{h_i^2 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_{wi}^2}} \right) \sigma_\varepsilon^2 \\ &= \sum_i \hat{y}_i^2 - \sum_i \left(h_i^2 + 2 \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_{wi}^2} \right) \hat{w}_i^2 \end{aligned} \quad (31)$$

$$\sigma_{wi}^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{h_i^2 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_{wi}^2}} + \hat{w}_i^2 \quad (32)$$

ここで、 N は測点数である。

以上より、推定手順は以下のようになる。

手順1:式(30)より \hat{w}_i を推定する。

手順2:式(31),(32)より $\sigma_\varepsilon^2, \sigma_{wi}^2$ を求め、手順1,2を収束するまで繰り返す。

5 通り変位の作成

通り変位波形の標準偏差を σ_r 、通り変位の相関長を d とし、原波形の距離相関関数を次式により表すこととする。

$$R(x) = \sigma_r^2 e^{-(x/d)^2} \quad (33)$$

長さ L の軌道区間を、 $N + 1$ 個の測点数で等分割する。その際、 i 番測点の x 座標 x_i を次式で与える。

$$x_i = i\Delta x, (i = 0, \dots, N), \Delta x = \frac{L}{N} \quad (34)$$

レール通り変位波形の x_i における値を w_{0i} とし、その離散データを成分にもつベクトルを $\{\mathbf{W}_0\}$ とおく。当該ベクトルに関する分散・共分散行列を $[\mathbf{C}]$ とすると、 $\{\mathbf{W}_0\}$ は次式により生成することができる。

$$\{\mathbf{W}_0\} = [\mathbf{\Phi}][\mathbf{\Lambda}^{1/2}]\{\boldsymbol{\xi}\} \quad (35)$$

ここで、 $[\mathbf{\Lambda}^{1/2}]$ は $[\mathbf{C}]$ に関する固有値問題の固有値の平方根 $\sqrt{\lambda_i}$ を対角項に持つ対角行列、 $[\mathbf{\Phi}]$ は固有ベクトル $\{\boldsymbol{\phi}_i\}$ を縦ベクトル成分に持つ行列、 $\{\boldsymbol{\xi}\}$ は期待値ゼロ、分散1の標準正規乱数を成分に持つベクトルである。

6 解析結果

表-1 各設定値

| | |
|--------------------------|--------|
| σ_r (m) | 0.005 |
| d (m) | 1.7 |
| σ_ε (m) | 0.0005 |
| σ_w (m) | 0.005 |

今回の解析では、軌道の測定区間長を 200m、軌道両端を含めた観測点数を 201 個とした。その他の各種設定値は表-1 のように与えた。なお、表-1 において σ_ε は 10m 弦正矢の測定ノイズの標準偏差、 σ_w は通り

変位原波形の離散正弦変換の標準偏差の推定値をそれぞれ表している。

通り変位波形の離散正弦変換と原波形の推定値についてEMアルゴリズムによる結果と、本手法とで比較する(図-3)。推定精度が低下する2.5m波長と5m波長では両者とも0付近に収束したが、無限波長では本推定法がより小さな値へと収束し、無限波長でも本推定法はある程度の精度でノイズを抑制できることが窺える。

通り変位波形の推定結果を図-4に示す。図より、EMアルゴリズムによる復元の方が、多少精度が劣っていることがわかる。原波形とその推定値は多少の差はあるものの、概ね一致していることから、通り変位波形自体の復元は良好であることがわかる。

図-5は、波数と分散推定値との関係を表したものである。波数が1.25, 2.5(1/m)で分散値の低下が認められるが、これは当該波数成分のノイズによる精度低下抑制の結果によるものである。

測定ノイズの標準偏差と反復回数との関係を、図-6に示す。どちらの手法も反復回数が30回程度で値が収束しているが、その収束値はEMアルゴリズムによる推定法では0.00012程度、本推定法では0.0004付近をとった。表-1より、 σ_ϵ は0.0005(m)が正解であることから、本推定法の方が高い推定精度を有することがわかる。

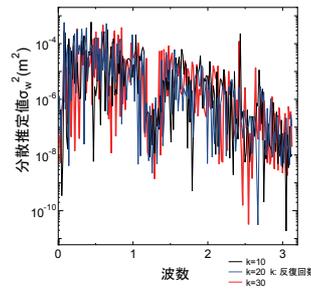


図-5 波数と分散推定値の関係

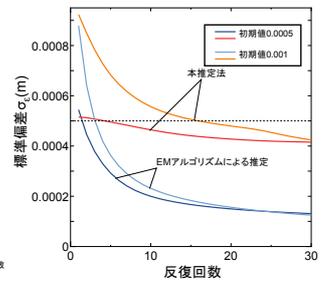


図-6 測定ノイズの標準偏差

7 おわりに

本研究では、原波形の復元方法として離散正弦変換に基づく通り変位表現の下、EMアルゴリズムに基づいた推定法と新しく導出した推定法を用い、比較・検討した。その結果、EMアルゴリズムより本推定法の方が精度面でも原波形復元に適しているという結果を得た。

謝辞 本研究は科研費(20K04661)の助成を受けたものである。ここに記して謝意を表す。

参考文献

- 1) 阿部和久, 水野雄太, 紅露一寛: 通り変位波形におけるパラッキが軌道座屈強度の確率特性に及ぼす影響, 鉄道工学シンポジウム論文集 24号 167-174, 2020.
- 2) 坪川洋友, 矢澤英治, 小木曾清高, 南木聡明: 車体装架型慣性正矢軌道検測装置の開発, 鉄道総研報告, 26(2), 7-12, 2012.
- 3) 関原謙介: ベイズ信号処理, 共立出版, 2015.

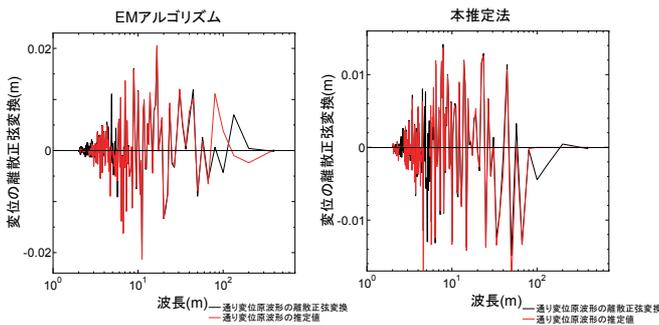


図-3 通り変位波形の離散正弦変換

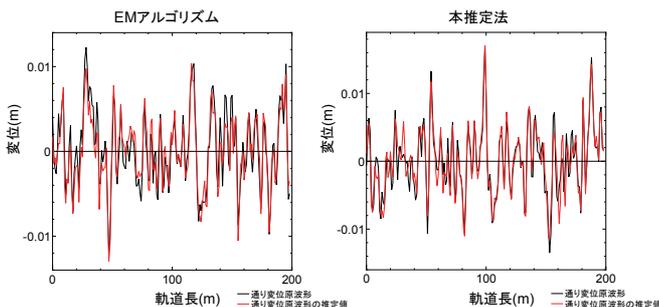


図-4 通り変位原波形と推定値