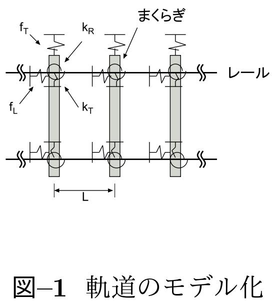
復元通り変位原波形に基づく軌道座屈予測に関する研究

新潟大学大学院自然科学研究科　学生会員　中田 健太
新潟大学工学部　正会員　阿部 和久
新潟大学工学部　正会員　紅露 一寛

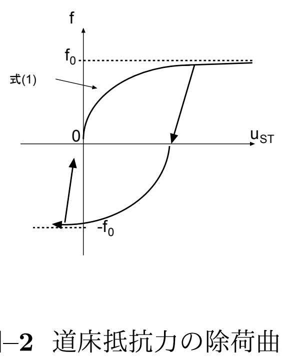
1　はじめに

軌道の通り変位波形が検測データから取得できれば, 座屈温度と発生個所をある程度正確に予測可能となることが期待される. しかし, 現在取得されている検測データは 10m 弦正矢であるため, それより復元される波形には約 1.25(1/m) 前後の波数成分の情報が欠落している. 本研究では, 現在高精度で取得されている 10m 弦正矢データから軌道の変位波形を推定し, 将来どの箇所で, またレール温度が何度で座屈するのかを予測し得る手法の構築を目的として, 幾つかの検討を行う. まず, 座屈発生までの過程における通り変位波形の波数成分の成長特性を調べ, どの波数域が座屈に関与するのかを明らかにする. 次に,10m 弦正矢データと,5m 弦正矢データそれぞれから復元した原波形の下での座屈解析を行う. 具体的には, 復元された通り変位波形に対し, 飛び移り座屈温度と, 軌道たわみ量の絶対値が最初に 5mm を超える箇所を求めるための解析を実施する. 正解とその結果とに基づき,10m 弦正矢データからの原波形復元による座屈予測の可能性について検討する. また, 同様に 5m 弦正矢データから波形復元した場合についても調べる. さらに,10m 弦正矢の絶対値に制約を課した通り変位補正を施した軌道を想定して, 上述と同様に, 10m 弦正矢と 5m 弦正矢データから復元した波形に基づいた座屈予測の適用可能性について検討する.

2　軌道のモデル化



図–1　軌道のモデル化



図–2　道床抵抗力の除荷曲線

左右のレールとまくらぎから構成される軌きょうを図**-1** のようにモデル化する. 2 本のレールは横方向たわみとレール軸方向の伸縮を考慮した Euler ばりで表現する. レール締結部分は回転ばね k_R と横方向ばね k_T で表す. まくらぎは横方向変位とレール軸方向変位を考慮し, 等間隔 L で設定する. ただし, まくらぎに作用する道床横抵抗力 f_T は次式で与える. また, 縦抵抗力 f_L も式 (1) と同様の式に基づき設定する.

$$f_T = f_{0T} \frac{u_{ST}}{a_T + |u_{ST}|} \tag{1}$$

ここで,u_{ST} はまくらぎの横方向変位,f_{0T} は最終道床横抵抗力,a_T は作用力が最終道床抵抗力の 1/2 を与えるときの変位である, なお, 式 (1) の道床横・縦抵抗力とまくらぎ変位の関係は図**-2** のような曲線で与えられ, 最終道床横・縦抵抗力 f_{0T}, f_{0L} に漸近する. また, 除荷時は作用力がなくなるまで傾き $(f_{0T}/a_T, f_{0L}/a_L)$ で戻り, その後, 式 (1) の曲線に従って逆方向に抵抗力が作用するように設定した. 以上のモデル化の下, レールたわみを有限変位の定式化に従い離散化する.

3　初期通り変位の生成

既往の研究[1)] より, 原波形の距離相関は次式で表す.

$$R(x) = \sigma^2 e^{-(x/d)^2} \tag{2}$$

ここで,σ と d は初期通り変位の標準偏差と相関長である. 長さ l の対象区間を M 分割し, 各分割点 x_i を次式で定める.

$$x_i = i\Delta x, (i = 0, \cdots, M), \qquad \Delta x = l/M \tag{3}$$

当該波形の x_i における値を w_{0i} とし, それを成分に持つベクトルを $\{\mathbf{W_0}\}$ とおく. このベクトルに関する分散・共分散行列を $[\mathbf{C}]$ は次式で与えられる.

$$[\mathbf{C}] = E(\boldsymbol{W}_0 \cdot \boldsymbol{W}_0^T) \tag{4}$$

ここで、$E(\cdot)$ は期待値を,$(\cdot)^T$ は転置を表す. また, 式 (2) より, 行列 $[\mathbf{C}]$ の成分は次式で与えられる.

$$c_{ij} = \sigma^2 e^{-(|i-j|\Delta x/d)^2} \tag{5}$$

次に,$[\mathbf{C}]$ に対して次の固有値問題を考える.

$$[\mathbf{C}]\{\boldsymbol{\phi}_i\} = \lambda_i\{\boldsymbol{\phi}_i\} \tag{6}$$

ここで,λ_i は固有値,$\{\boldsymbol{\phi}_i\}$ は固有ベクトルである.

初期通り変位波形ベクトルを, 期待値がゼロ, かつ, 式 (4) に従うものとすると, それは次式で与えられる[2).]

$$\{\mathbf{W_0}\} = [\boldsymbol{\Phi}][\boldsymbol{\Lambda}^{1/2}]\{\boldsymbol{\xi}\} \tag{7}$$

ここで,$[\boldsymbol{\Lambda}^{\mathbf{1/2}}]$ は正の固有値の平方根を対角項に持つ対角行列,$[\boldsymbol{\Phi}]$ は固有ベクトル $\{\boldsymbol{\phi}_i\}$ を縦ベクトルに持つ行列, $\{\boldsymbol{\xi}\}$ は期待値ゼロでかつ分散 1 の標準正規乱数を成分に持つベクトルである.

以上の手順により, 左右レールそれぞれに対してランダムな初期通り変位波形を設定する.

4　10m 弦正矢の絶対値に制約を課した通り変位波形の補正

本研究では,10m 弦正矢の絶対値に制約を課した通り変位の補正を施す場合も想定し, その下での軌道座屈解析を実施する. 以下にその補正手順について簡単に述べる.

10m 弦正矢データ y_i と原波形データ w_i との関係を次のように与える.

$$\{\mathbf{Y}\} = [\mathbf{H}]\{\mathbf{W}\} \tag{8}$$

ここで,$[\mathbf{H}]$ は原波形を弦正矢に変換する行列である.

修正前の弦正矢ベクトルを y_0, それに加えられる修正量を y,Lagrange 乗数を $\hat{\lambda}$,10m 弦正矢の許容値 y_{max} として, 目的関数を次式で与える.

$$J = \frac{1}{2}[\mathbf{W}^T]\{\mathbf{W}\} + \frac{1}{2}\sum_j \hat{\lambda}_j\{(y_{0j}+y_j)^2 - {y_{max}}^2\} \tag{9}$$

式 (9) より,J の w_i に関する感度は次式で与えられる.

$$\frac{\partial J}{\partial w_i} = w_i + \sum_m \hat{\lambda}_m (y_{0m} + y_m) h_{mi} \tag{10}$$

そこで,w_i の補正量 Δw_i を次式により与えることとする.

$$\Delta w_i = -\alpha \frac{\partial J}{\partial w_i} \tag{11}$$

ただし,$\alpha > 0$ とする.

式 (11) に (10) を代入すると次式を得る.

$$\Delta w_i = -\alpha\{w_i + \sum_m \hat{\lambda}_m (y_{0m} + y_m) h_{mi}\} \tag{12}$$

$|y_{0i} + y_i| > y_{max}$ のとき,y_i に補正量 Δy_i を加えて, 次式を満たすようにする.

$$(y_{0i} + y_i + \Delta y_i)^2 = {y_{max}}^2 \tag{13}$$

式 (13) より次の近似式を得る.

$$(y_{0i} + y_i)^2 + 2(y_{0i} + y_i)\Delta y_i \simeq {y_{max}}^2 \tag{14}$$

式 (14) より,Δy_i は次式で与えられる.

$$\Delta y_i = \frac{1}{2(y_{0i} + y_i)}\{{y_{max}}^2 - (y_{0i} + y_i)^2\} \tag{15}$$

また, 式 (8) より次式を得る.

$$\{\Delta y\} = [H]\{\Delta w\} \tag{16}$$

さらに, 式 (16) の Δw_i に式 (12) を代入して整理すると次式を得る.

$$\begin{aligned} &\sum_j \{\sum_m h_{im} h_{jm} (y_{0j} + y_j)\}\hat{\lambda}_j \\ &= \frac{1}{2\alpha(y_{0i} + y_i)}\{(y_{0i} + y_i)^2 - {y_{max}}^2\} - y_i \end{aligned} \tag{17}$$

式 (17) の連立方程式を $\hat{\lambda}_j$ について解くと, 式 (10) の $\{\hat{\lambda}\}$ が求められる.

5　解析結果

5.1　軌道の解析条件

表–1　軌道系の各種設定値

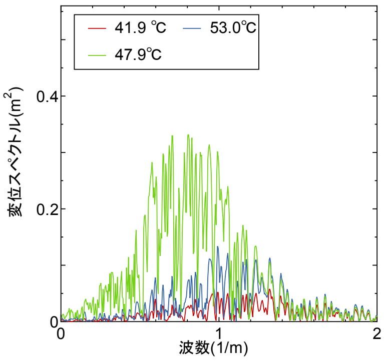
EI	$(\mathrm{N/m^2})$	6.63×10^5
EA	(GPa)	1.32
α	(1/℃)	12×10^{-6}
L	(m)	0.6
k_T	(MN/m)	40.0
k_R	$(\mathrm{kN \cdot m/rad})$	20.0
f_{0T}	(kN)	5.5
a_T	(mm)	1.0
f_{0L}	(kN)	2.5
a_L	(mm)	1.0

本解析では,50kgN レールを想定し, レールや道床縦・横抵抗力に関する各種設定値を表-1 のように設定した. ただし, 表-1 において,EA,α はレールの伸び剛性と線膨張係数とする.

レールはまくらぎ1区間 (0.6m) 当りをはり要素で2分割し, 軌道をまくらぎ1200区間 (720m) で与えた. また, 本解析では, 軌道の両端は変位拘束せず, 道床横・縦抵抗力の作用下で伸縮できるように設定した.

5.2　軌道条件が波数成分の成長過程に及ぼす影響

初期通り変位の相関長を l =1.7m, 標準偏差を σ =5mm として, レール温度とレール変位との関係を求めた. その結果得られた変位量の波数スペクトルを**図-3** に示す. ここでは, レール温度が 41.9 ℃ (座屈前),53.0 ℃ (座屈発生),47.9 ℃ (座屈後) でのスペクトル分布を示した. **図-3** より, 変位スペクトルの増大に



図–3　座屈の発生過程における波数の成長特性

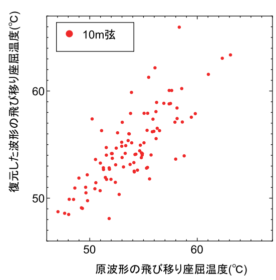
つれて, 主要な波数成分が低波数側に移動していることがわかる. 特に, たわみ変位が増大するときの波数の主要成分が約 1.5(1/m) 以下であることから, 座屈に関与する主な波数域がおよそ 1.5(1/m) よりも小さな値であることが明らかになった. また, 座屈時の理論波数は,$k_m = 1.62$(1/m) となる. この波数を起点として, たわみスペクトルの分布域が広がり, その結果として局所化が進行し, 座屈波形が成長していく [3].

図-2 のような道床横抵抗力の関係から, たわみ変位の増大につれて, 単位長さあたりの道床横剛性が小さくなるため, 波数のスペクトル分布は $k_m = 1.62$(1/m) から次第に低波数側に移動したと考えられる. さらに, 座屈に関与する主な波数域はおよそ 1.5(1/m) よりも小さな値であることが明らかになった. したがって,10m 弦正矢データによって約 1.25(1/m) 前後の波数成分の情報が欠落することは座屈予測の精度に影響を与えると考えられる.

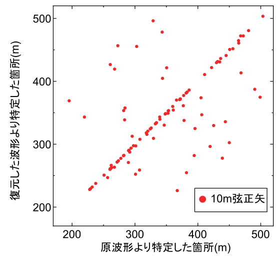
5.3　10m 弦正矢より波形復元する場合

ここでは,10m 弦正矢データから復元した原波形の下での座屈解析を行う. 具体的には,10m 弦正矢データから復元された波形に対し, 飛び移り座屈温度を特定するための解析を実施し, 正解とその結果を比較し,10m 弦正矢データからの原波形復元による座屈予測の可能性について検討する (**図-4**). 同様に,10m 弦正矢データから復元された波形に対し, 軌道たわみ量の絶対値が最初に 5cm を超える箇所を特定するための解析を実施し, 正解とその結果を比較し, 10m 弦正矢データからの原波形復元による座屈予測の可能性について検討する (**図-5**). ただし, **図-5** はレール左端の位置を 0m とし表記した.

初期通り変位の相関長を l =1.7m, 標準偏差を σ =5mm とし,100 ケース計算を行い, その結果を正解と比較した. なお, **図-4** には飛び移り座屈温度を比較したものを, **図-5** にはたわみ量の絶対値が最初に 5cm を超えた箇所を比較したものを示す. **図-4**, **図-5**



図–4　飛び移り座屈温度

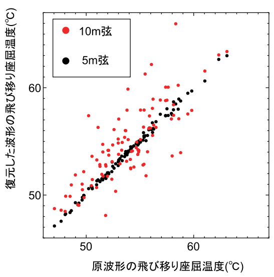


図–5　たわみ量が最初に 5cm を超えた箇所

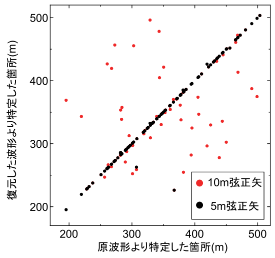
に示す結果にはバラツキ (予測誤差) が見られる. これは, 座屈に関与する主な波数域がおよそ 1.5(1/m) よりも小さな値であるのに対し, 10m 弦正矢データでは約 1.25(1/m) 前後の波数成分の情報が欠落するため, 予測の精度が低下したためと考えられる.

5.4　5m 弦正矢より波形復元する場合

上記の解析と同じ条件で 5m 弦正矢より復元された波形に対して, 飛び移り座屈温度とたわみ量の絶対値が最初に 5cm を超えた箇所を求めたものを**図-6**, **図-7** に示す. 図には**図-4**, **図-5** の結果も合わせて示した. **図-6**, **図-7** より,10m 弦正矢データから復元した原波形よりも 5m 弦正矢データから復元した原波形の方が座屈予測の精度が格段に高いことがわかる. また, 座屈温度における両者の分散は 0.57×10^1 (℃)^2 と 0.59×10^{-1} (℃)^2 となり,5m 弦正矢データより復元した波形の使用により約 10 倍精度が向上している.



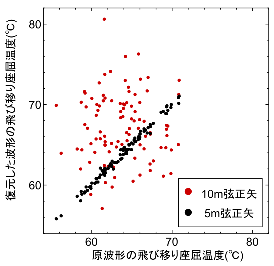
図–6　飛び移り座屈温度



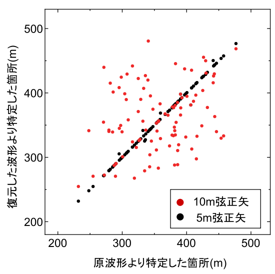
図–7　たわみ量が最初に 5cm を超えた箇所

5.5　10m 弦正矢の絶対値に制約を課す場合

現行の基準を参考に,10m 弦正矢データの初期通り変位の許容値を 4mm に設定し, 波形補正を行う場合を想定する. 前述の諸検討と同様の条件で座屈解析を実施した結果を図-**8**, 図-**9** に示す.



図–8　飛び移り座屈温度



図–9　たわみ量が最初に 5cm を超えた箇所

これらの結果でも,5m 弦正矢データより復元した波形による座屈予測の方が精度が明らかに高いことがわかる.10m 弦正矢値に基づき波形補正をすることで, 補正前の波形とはスペクトル特性が変化すると考えられるが, 図-**8**, 図-**9** より,5m 弦正矢データより原波形を復元することで, 十分な精度で座屈予測可能となることがわかった.

6　おわりに

本研究では, 座屈発生までの過程における通り変位波形の波数成分の成長特性を調べ, どの波数域が座屈に関与するのかを明らかにするため, 軌道モデルによる座屈解析を実施した. その結果, 変位の増大につれて, 主要な波数成分が低波数側に移動しており, 座屈に関与する主な波数域はおよそ 1.5(1/m) よりも小さな値であることが明らかになった. この結果から,10m 弦正矢データで取得できない約 1.25(1/m) 以上の波数成分が,10m 弦正矢データより復元した波形の下での座屈予測の精度に影響を与える可能性が示唆された.

そこで,10m 弦正矢データから復元した原波形の下で, 飛び移り座屈温度と, 軌道たわみ量の絶対値が最初に 5cm を超える箇所を求めた. その結果,10m 弦正矢データから復元した波形の下での座屈予測は, 誤差で約 7 ℃, 座屈箇所では約 150m となり,10m 弦正矢データでの座屈予測は困難であることがわかった.

これを受けて, 座屈に関与する主な波数成分が取得可能な 5m 弦正矢データより復元した波形を用いて座屈予測を検討した. その結果,5m 弦正矢データから復元した波形の下での座屈予測は, 正解との誤差の最大値が, 座屈温度では約 0.7 ℃となり,10m 弦正矢データを用いた場合に比べ約 10 倍予測精度が向上した.

また, 初期通り変位の 10m 弦正矢が所定の値以下となるように通り変位を補正した場合の, 10m 弦正矢データと 5m 弦正矢データそれぞれから復元した原波形下での解析も実施した. その結果,5m 弦正矢データから復元した原波形に基づく座屈解析の方が約 18 倍程精度が高いことがわかった. よって, 本研究の様な座屈予測の観点においては, 座屈に関与する主な波数域を取得できる 5m 弦正矢データが必要であるといえる.

謝辞　本研究は科研費 (20K04661) の助成を受けたものである. ここに記して謝辞を表する.

参考文献

1) 千葉颯兵, 阿部和久, 小松佳弘, 紅露一寛:通り変位測定データに基づくレール軸力推定法に関する理論的検討,J-RAIL2017,CD-ROM,S2-14-4,2017.
2) 阿部和久, 水野雄太, 紅露一寛：”通り変位波形におけるバラツキが軌道座屈強度の確率特性に及ぼす影響”, 鉄道工学シンポジウム論文集, No.24,167-174,2020.
3) 阿部和久, 田中洋介, 西宮裕騎, 紅露一寛:レール温度座屈時の分岐過程に関する一考察, 鉄道力学論文集,No.13,7-14,2009.