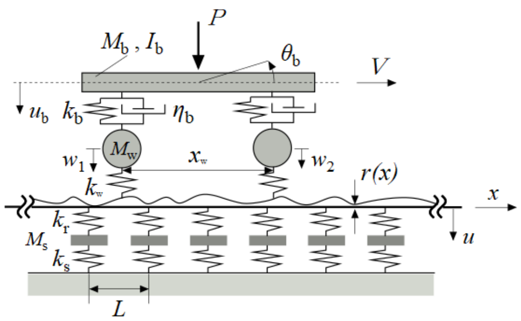
ランダムな凹凸を有する軌道系と走行台車との連成系における周波数応答期待値解析

新潟大学大学院自然科学研究科　学生会員　由野 舜
新潟大学工学部社会基盤工学プログラム　正会員　阿部 和久
新潟大学工学部社会基盤工学プログラム　正会員　紅露 一寛

1　はじめに

列車走行時における鉄道振動は，主にレール頭頂面と車輪間の凹凸と，まくらぎの離散支持による見かけの支持剛性が起因するパラメータ加振とからなる．前者は凹凸がランダムとなるため，本来確定論的な評価ができない．そこで，著者ら[1)]はレール・車輪間の凹凸を定常ランダムな波形と見なし，所定の距離相関関数を与えることで，振動特性を周波数応答期待値で直接求める手法を構築した．時刻歴応答解析による評価では，複数の凹凸波形を作成し，それらの応答平均を求める必要がある．また，一般的に時刻歴応答解析で用いられるパッドのモデルは，剛性が周波数に依存する．そのため，レール凹凸が振動応答のスペクトル特性に及ぼす影響や，高周波数域での軌道・台車連成系の振動応答の評価を目的とする場合，周波数域での解析が有効である．本研究では，ランダムな凹凸を有する無限周期軌道と走行台車との連成系を対象に，車輪加速度のパワースペクトル密度の評価法を導出し，各種条件が応答期待値に及ぼす影響について調べる．

2　解析モデル



図–1　軌道・台車連成系モデル

図 1 に示すような，レールに定常ランダムな凹凸 $r(x)$ を設けた軌道と一定速度 V で走行する台車で構成される軌道・台車連成系モデルを対象とする．台車枠は質量 M_b，回転慣性 I_b の剛体で与え，車輪間距離 x_w で配置した前後車輪は質量 M_w の質点でモデル化する．台車枠・車輪間は台車枠の振動低減効果を考慮して，ばね定数 k_b と減衰定数 η_b からなる Voigt モデルにより表現し，車輪・レール間はばね定数 k_w のばねにより表現する．また，台車枠には車体重量に相当する静的荷重 P が作用するものとする．レールは間隔 L でまくらぎにより離散支持された無限長の Timoshenko ばりで表現する．まくらぎは質量 M_s の質点で表し，まくらぎを支持する軌道パッドとまくらぎ下パッドは，周波数域の定式化において複素剛性で与える．

3　解析手法

レール長手方向に周期性を持つ無限長レールを Floquet 変換[2)]により表現する．Floquet 変換は $x \in R$ で定義された非周期関数 $f(x)$ について次式で与えられる．

$$\tilde{f}(\tilde{x},\kappa)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\tilde{x}+nL)e^{in\kappa L} \tag{1}$$

ここで，L は周期長，$\tilde{x}$ は $(0,L)$ 間の実数，κ は $(-L/\pi,L/\pi)$ 間の波数である．

時刻 t における後輪と前輪の鉛直変位を w_1，w_2，レールの鉛直変位を u とする．また，後輪の位置を x とすると，前輪の位置は $x+x_w$ と表せる．

$t=x/V$ として，x について Floquet 変換した各車輪とレール間の接触力 $\tilde{F}_1$，$\tilde{F}_2$ は次式で与えられる．

$$\begin{aligned}\tilde{F}_1\left(\frac{\tilde{x}}{V},\kappa\right)&=k_w\tilde{w}_1-\tilde{u}(\tilde{x})+\tilde{r},\\ \tilde{F}_2\left(\frac{\tilde{x}}{V},\kappa\right)&=k_w\tilde{w}_2-\tilde{u}(\tilde{x}+x_w)+\tilde{r}\end{aligned} \tag{2}$$

同様に，時刻 t における台車枠の断面回転角を θ_b，台車枠の鉛直変位を u_b とすると，台車枠と各車輪間の接触力の Floquet 変換 $\tilde{F}_{b1}$，$\tilde{F}_{b2}$ は次式で与えられる．

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{b1}\left(\frac{\tilde{x}}{V},\kappa\right)&=k_b\left(\tilde{u}_b+\frac{x_w}{2}\tilde{\theta}_b-\tilde{w}_1\right),\\ \tilde{F}_{b2}\left(\frac{\tilde{x}}{V},\kappa\right)&=k_b\left(\tilde{u}_b+\frac{x_w}{2}\tilde{\theta}_b-\tilde{w}_2\right)\end{aligned} \tag{3}$$

台車枠の運動方程式を Floquet 変換すると次式が得られる．

$$
\begin{aligned}
&M_b V^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_b}{\partial x^2} + \tilde{F}_{b1}\left(\frac{\tilde{x}}{V},\kappa\right) + \tilde{F}_{b2}\left(\frac{\tilde{x}}{V},\kappa\right) - \tilde{P} = 0,\\
&I_b V^2 \frac{\partial^2 \tilde{\theta}_b}{\partial x^2} + \frac{x_w}{2} F_{b1}\left(\frac{\tilde{x}}{V},\kappa\right) - \frac{x_w}{2} F_{b2}\left(\frac{\tilde{x}}{V},\kappa\right) = 0
\end{aligned} \tag{4}
$$

各車輪の運動方程式を Floquet 変換すると次式が得られる．

$$
\begin{aligned}
&M_w V^2 \frac{\partial^2 \tilde{w}_1}{\partial x^2} + F_1\left(\frac{\tilde{x}}{V},\kappa\right) - F_{b1}\left(\frac{\tilde{x}}{V},\kappa\right) = 0,\\
&M_w V^2 \frac{\partial^2 \tilde{w}_2}{\partial x^2} + F_2\left(\frac{\tilde{x}}{V},\kappa\right) - F_{b2}\left(\frac{\tilde{x}}{V},\kappa\right) = 0
\end{aligned} \tag{5}
$$

Floquet 変換した各項を次のような Fourier 級数展開で与える．

$$
\begin{aligned}
&\tilde{u}(\tilde{x},\omega,\kappa) = \sum_n a_n(\omega,\kappa) e^{-iZ_n\tilde{x}},\\
&\tilde{w}_j\left(\frac{\tilde{x}}{V},\kappa\right) = \sum_n b_{jn}(\kappa) e^{-iZ_n\tilde{x}},\\
&\tilde{u}_b\left(\frac{\tilde{x}}{V},\kappa\right) = \sum_n u_{bn}(\kappa) e^{-iZ_n\tilde{x}},\\
&\tilde{r}(\tilde{x},\kappa) = \sum_n \tilde{r}_n(\kappa) e^{-iZ_n\tilde{x}},\\
&\tilde{F}_j\left(\frac{\tilde{x}}{V},\kappa\right) = \sum_n f_{jn}(\kappa) e^{-iZ_n\tilde{x}},\\
&\tilde{F}_{bj}\left(\frac{\tilde{x}}{V},\kappa\right) = \sum_n f_{bjn}(\kappa) e^{-iZ_n\tilde{x}},\\
&\tilde{\theta}_b\left(\frac{\tilde{x}}{V},\kappa\right) = \sum_n \theta_{bn}(\kappa) e^{-iZ_n\tilde{x}},\\
&\tilde{P} = \sum_n P_n(\kappa) e^{-iZ_n\tilde{x}},\\
&P_0(\kappa) = P\frac{2\pi}{L}\tilde{\delta}(\kappa), \quad P_n = 0 \quad (n \neq 0),\\
&Z_n = \frac{2\pi n}{L} + \kappa
\end{aligned} \tag{6}
$$

式 (3) に式 (6) を代入すると，f_{bjn} は次式で表せる．

$$
\begin{aligned}
&f_{b1n} = k_b\left(u_{bn} + \frac{x_w}{2}\theta_{bn} - b_{1n}\right),\\
&f_{b2n} = k_b\left(u_{bn} + \frac{x_w}{2}\theta_{bn} - b_{2n}\right)
\end{aligned} \tag{7}
$$

式 (4) に式 (6)，式 (7) を代入すると次式を得る．

$$
\begin{aligned}
&u_{bn} = \frac{1}{2k_b - M_b V^2 Z_n^2}\left\{k_b(b_{1n} + b_{2n}) + P_n\right\},\\
&\theta_{bn} = \frac{k_b x_w}{k_b x_w^2 - 2I_b V^2 Z_n^2}(b_{1n} - b_{2n})
\end{aligned} \tag{8}
$$

式 (7) に式 (8) を代入すると次式を得る．

$$
\begin{aligned}
&f_{b1n} = q_1 b_{1n} + q_2 b_{2n} + \gamma P_n,\\
&f_{b2n} = q_2 b_{1n} + q_1 b_{2n} + \gamma P_n,\\
&q_1 = \frac{k_b^2}{2k_b - M_b V^2 Z_n^2} + \frac{k_b^2 x_w^2}{2k_b x_w^2 - 4I_b V^2 Z_n^2} - k_b,\\
&q_2 = \frac{k_b^2}{2k_b - M_b V^2 Z_n^2} + \frac{k_b^2 x_w^2}{2k_b x_w^2 - 4I_b V^2 Z_n^2},\\
&\gamma = \frac{k_b}{2k_b - M_b V^2 Z_n^2}
\end{aligned} \tag{9}
$$

式 (4) に式 (6)，式 (9) を代入し，b_{1n}，b_{2n} について解くと次式を得る．

$$
\begin{aligned}
&b_{1n} = \mu_1 f_{1n} + \mu_2 f_{2n} - \gamma(\mu_1 + \mu_2)P_n,\\
&b_{2n} = \mu_2 f_{1n} + \mu_1 f_{2n} - \gamma(\mu_1 + \mu_2)P_n,\\
&\mu_1 = \frac{M_w V^2 Z_n^2 + q_1}{(M_w V^2 Z_n^2 + q_1)^2 - q_2^2},\\
&\mu_2 = \frac{-q_2}{(M_w V^2 Z_n^2 + q_1)^2 - q_2^2}
\end{aligned} \tag{10}
$$

式 (10) とレールの運動方程式[1] から求められるレールたわみ $\tilde{u}$ を式 (2) に代入することで得られる無限連立方程式は，次式のように行列表記できる．

$$
[\mathbf{A}(\kappa)]\{\mathbf{f}(\kappa)\} = [\mathbf{B}(\kappa)]\{\mathbf{r}(\kappa)\} - k_w\gamma\left(1 + \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)\{\mathbf{P}(\kappa)\} \tag{11}
$$

ここで，$\{\mathbf{f}(\kappa)\}$ は各車輪の接触力の展開係数を並べたベクトル，$\{\mathbf{r}(\kappa)\}$ はレール凹凸の展開係数を成分に持つベクトル，$[\mathbf{A}(\kappa)]$ と $[\mathbf{B}(\kappa)]$ は係数行列である．$\{\mathbf{P}(\kappa)\}$ は台車枠に作用する静的荷重の展開係数に関するベクトルである．

式 (5) に式 (10) を代入して，各車輪の加速度 α_{1n}，α_{2n} が次式で与えられる．

$$
\begin{aligned}
\alpha_{1n} =& \frac{1}{M_w}\{(q_1\mu_1 + q_2\mu_2 - 1)f_{1n} + (q_1\mu_2 + q_2\mu_1)f_{2n}\}\\
&+ \frac{1}{M_w}\gamma\{1 - (q_1 + q_2)(\mu_1 + \mu_2)\}P_n,\\
\alpha_{2n} =& \frac{1}{M_w}\{(q_1\mu_2 + q_2\mu_1)f_{1n} + (q_1\mu_1 + q_2\mu_2 - 1)f_{2n}\}\\
&+ \frac{1}{M_w}\gamma\{1 - (q_1 + q_2)(\mu_1 + \mu_2)\}P_n
\end{aligned} \tag{12}
$$

以上より，レール凹凸を期待値ゼロの定常ランダムな波形と仮定すると，式 (11) と式 (12) から車輪加速

度 PSD E_w は次式で与えられる．

$$E_w = \frac{1}{VM_w^2}\sum_n \left|C_n\left(\frac{\omega}{V}\right)\right|^2 S_r\left(\frac{2\pi n}{L}+\frac{\omega}{V}\right) + 2\pi\left(\frac{k_w P}{M_w}\right)^2 \sum_{n\neq 0}|h_n|^2 \delta\left(\frac{2\pi n}{L}V-\omega\right) \tag{13}$$

ここで，ω は角振動数，C_n，h_n は式 (11) と式 (12) より求められる係数，S_r はレール凹凸 PSD，δ はデルタ関数である．

式 (13) より，車輪加速度 PSD E_w はレール凹凸 PSD を含んだレール凹凸成分と静的荷重 P によるパラメーター加振成分で構成され，それぞれを分離して議論できる．

4　解析条件

レールはまくらぎ間隔 L=0.6m で離散支持された 50kgN レールとする．レール 1 本当たりのまくらぎ質量は 100kg，台車枠質量と回転慣性および車輪質量はそれぞれ 1500kg，500kg·m^2，600kg とする．また，車輪間距離 x_w=2.1m の台車は一定速度 30m/s で走行するものとし，作用する静的荷重を 140kN と設定した．各種ばね定数については k_b=1MN/m，k_w=1.5GN/m，k_r=50MN/m，k_s=30MN/m，loss factor は 0.15 で与えた．

5　解析結果

5.1　車輪加速度 PSD と時刻歴応答解析の平均値の比較

本手法の妥当性を確認するため，車輪加速度 PSD と時刻歴応答解析の平均値を比較する．時刻歴応答解析は 20 ケースのランダムな凹凸に対する，台車走行時の車輪加速度より求める．前輪と後輪で比較した結果を**図 2**，**図 3** にそれぞれ示す．なお，レール凹凸 PSD を次式で設定した．

$$S_r(k) = \frac{2\sigma^2 d}{1+(kd)^2} \tag{14}$$

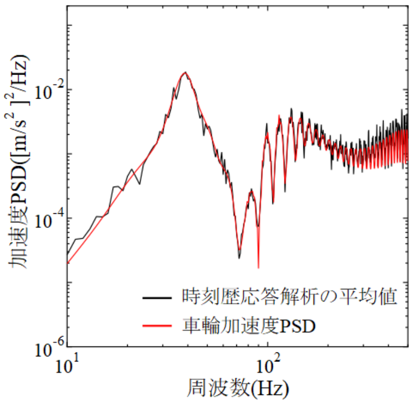
ここで，k は波数であり，標準偏差 σ=1.0×10^{-5}m，相関長 d=0.2m と設定し，軌道パッド減衰定数を 40kNs/m，まくらぎ下パッド減衰定数を 7.4kNs/m とし，その他の数値については解析条件のとおりとした．

図 2，**図 3** より，本手法で求めた期待値は前後輪ともに 20 ケースの時刻歴応答解析で求めた平均値との整合性が高く，本手法の妥当性が確認できる．

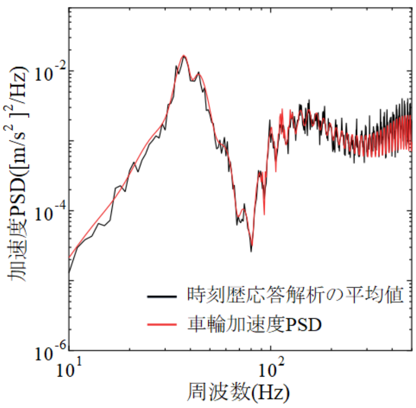
5.2　台車枠の有無による車輪加速度 PSD の比較

台車枠の有無が車輪加速度 PSD に及ぼす影響について調べる．台車枠の質量を無視したものと比較した，後輪の解析結果を**図 4** に示す．

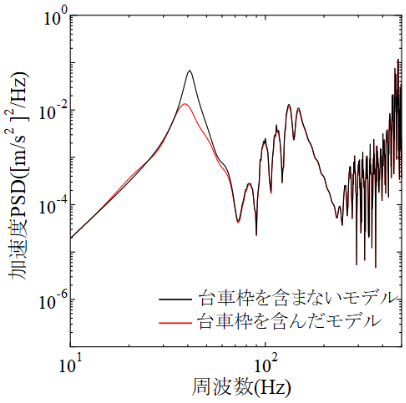
図 4 において，40Hz 付近で台車枠の有無による影響が認められ，台車枠を含んだモデルの方が加速度 PSD の値が小さくなっていることから，台車枠による振動の低減効果が確認できる．それ以外の周波数域では応答期待値の差は小さく，無視し得る程度となっている．



図–2　後輪の加速度 PSD の比較



図–3　前輪の加速度 PSD の比較



図–4　台車枠の有無による比較

5.3　パッド類の剛性が車輪加速度 PSD にもたらす影響

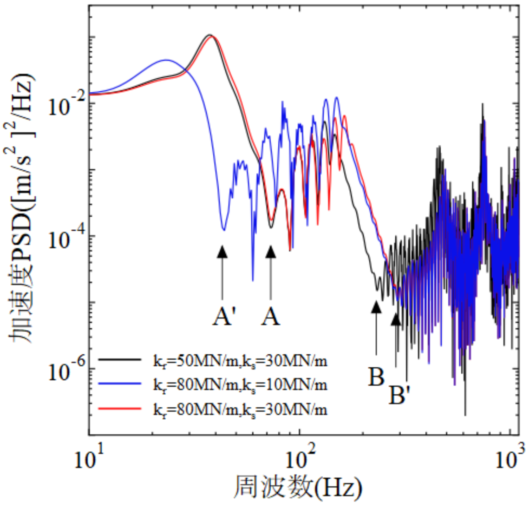
レール下の軌道条件が車輪加速度 PSD に及ぼす影響について調べる．レール凹凸 PSD は文献[3] を参考に $S_r=a/k^4(a=28.44\times10^{-7})$ とし，軌道パッドのばね定数は k_r=50MN/m と 80MN/m，まくらぎ下パッドのばね定数は k_s=10MN/m と 30MN/m に設定したものを比較する．パッド剛性が後輪の加速度 PSD に与える影響を**図 5** に，軌道の分散曲線に与える影響を**図 6** に示す．

図 5 において，まくらぎ下パッド剛性は約 150Hz 以下の周波数域で，軌道パッド剛性は 200Hz 以上の周波数域で車輪加速度 PSD に影響を及ぼしていることがわかる．**図 6** の軌道の分散曲線においても同様の傾向が確認でき，まくらぎ下パッドの剛性が低周波数域の波動伝播モードに，軌道パッドの剛性が高周波数域の波動伝播モードに影響している．以上のことから，低周波数域の波動伝播モードはまくらぎの振動，高周波数域の波動伝播モードはレールの振動が関係していると考えられ，文献[2] においてもこうした影響が確認されている．

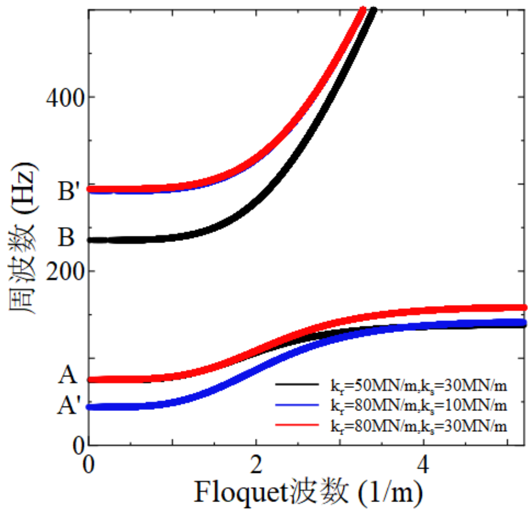
また，波動伝播モードが生じるパスバンド下端周波数 A，B が**図 5** と**図 6** で対応していることから，周波数域における車輪の加速度 PSD からパッド剛性を推定できると考えられる．

6　おわりに

本研究では，レール・車輪間に凹凸を有する軌道・台車連成系モデルを対象に，周波数域における車輪の加速度 PSD に各種条件が及ぼす影響について調べた．台車と軌道系の共振周波数は波動伝播モードが存在する周波数域より小さく，低周波数域の波動伝播モードはまくらぎ下パッドの剛性，高周波数域の波動伝播モードは軌道パッドの剛性が影響していることがわかった．



図–5　パッド類の剛性が後輪の加速度 PSD に及ぼす影響



図–6　パッド類の剛性が軌道の分散曲線に及ぼす影響

参考文献

1) 山田壮太，阿部和久，紅露一寛：ランダムな凹凸を有するレール・二車輪連成系の振動応答期待値解析，第 27 回鉄道技術・政策連合シンポジウム
2) 阿部和久，古屋卓稔，紅露一寛：まくらぎ支持された無限長レールの波動伝播解析，応用力学論文集 Vol.10, pp.1029-1036, 2007.
3) Gupta, S., Liu, W.F., Degrande, G., Lombaert, G. and Liu, W.N. : Prediction of vibrations induced by underground railway traffic in Beijing, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.310, pp.608-630, 2008.