交互砂州上の流れを再現する数値計算に要求される空間分解能

新潟大学大学院 自然科学研究科　学生会員　○石原 道秀
新潟大学災害・復興科学研究所　正会員　安田 浩保

1　はじめに

実河川や移動床水理の模型水路[1]の底面には，砂州などの周期的な幾何学形状を呈する河床波が自発的に発生・発達し伝播する．河床波上の流れは数値計算によって概ね再現ができることが知られているが，再現に必要な空間分解能は不明である．河床波と同様の現象として水面波がある．この水面波のうち，津波については数値計算による再現に必要な空間分解能は議論されている[2]．

現象の再現に必要な空間分解能の議論ができなかった要因の一つとして，流水中の河床波の形状とそこでの水理量の計測が一般に困難なことが挙げられる．近年になり，模型実験スケールにおける移動床水理の底面の形状と水深を高い空間分解能で計測できる手法である ST が開発された[3]．本研究では，河床波の一つである交互砂州上の流れを対象とし，その発生・発達の各々の状態において再現に必要な空間分解能について ST の計測値および打切り誤差の理論式に基づいて考察する．

2　模型実験の概要

交互砂州上の底面と水深の計測を目的に全長 12.0 m，流路幅 0.45 m の直線矩形断面の模型水路で実験を行った．同水路に硅砂を平坦に敷き詰め，これを初期河床とした．水理条件は交互砂州が発生・発達する条件を設定し，形状変化が緩慢となった 2 時間まで実施した．通水中は，ST を用い，2 × 2 cm の空間分解能で底面と水深を計測した．

図–1 の上図に計測区間 2 から 4m における ST で計測した底面，下図に計測した水深を示す．同図は通水 1 分 (平坦床)，通水 40 分 (砂州発生初期)，通水 120 分 (砂州発達後) の 3 時刻分を示した．同図より底面は平坦床から交互砂州が発生・発達した様子が定量化されていることがわかる．

3　交互砂州の再現に必要となる数値計算の空間分解能の検討

本章では，交互砂州上の流れの再現に必要となる数値計算の空間分解能を調べるため，以下を実施した．

3.1　検証方法

上記を明らかにするため，まず，**表–1** に示す計算格子を生成し，これの計算格子において，計測した各時刻の底面を入力値とした平面 2 次元の固定床の数値計算を実施した．これらの数値計算から得た結果と ST での計測値を比較することで，空間分解能の影響を定量的に評価する．数値計算は，iRIC の平面二次元のソルバーである Nays2D[4] を使用し，境界条件や差分方法などを統一して，空間分解能のみを変化させた計算を実施した．

表–1　計算条件

条件名	分解能 (固定)	分解能 (変数)
Case1	縦断方向 2cm	横断方向 2, 4, 8 cm
Case2	横断方向 2cm	縦断方向 2, 40, 80 cm

3.2　空間分解能ごとの計算結果の比較

図–2 は各分解能における水深の計算値と計測値の差分値を計測値で無次元化したもので，これは計算誤差に該当する．同図は上段から 2 × 2,8 cm の計算格子での各時刻の結果である．本紙面の掲載は，Case1 の 2 × 2 cm と 2 × 8 の結果のみとし，その他は同様の結果のため，割愛した．

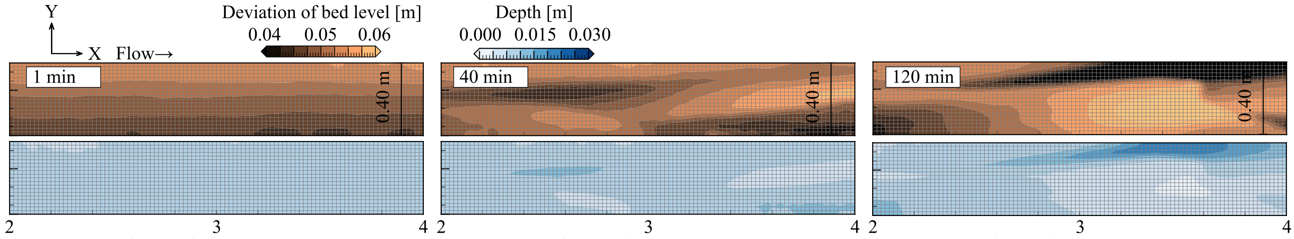
まず，2 × 2 cm の結果に着目すると，通水 1 分における計算誤差は全体的に 0.1 以内であることがわかる．その後，時間経過とともに交互砂州が発生・発達するにつれて，計算誤差が増大する．この傾向は 2 × 8 cm でも同様である．分解能ごとの計算誤差を比較すると，分解能の低下かつ交互砂州が発達するほど計算誤差が増大する．

計算誤差が増大する箇所は，砂州の前縁部などの底面形状の勾配や曲率が大きな箇所である．流れの正確な計算のためは，微分値が正確に計算される必要がある．このような勾配などが大きな底面形状の箇所では，その微分値が不正確となっていることが推測される．

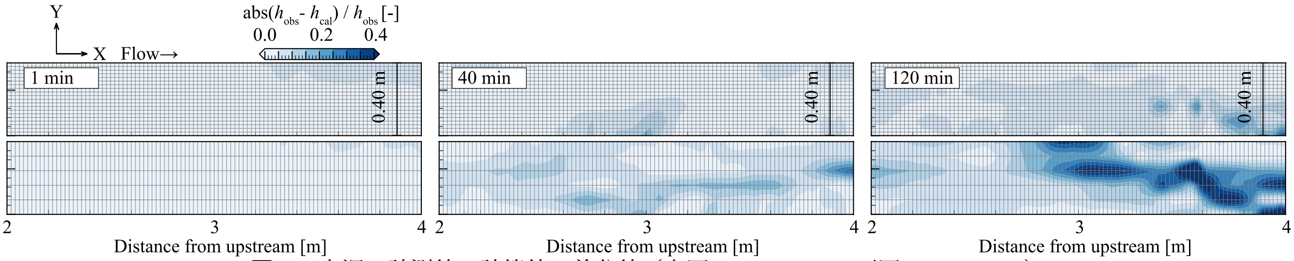
3.3　底面形状と計算誤差の対応関係

そこで，本節では，数値計算の入力値である底面の勾配の再現性と計算誤差の対応関係について考察する．

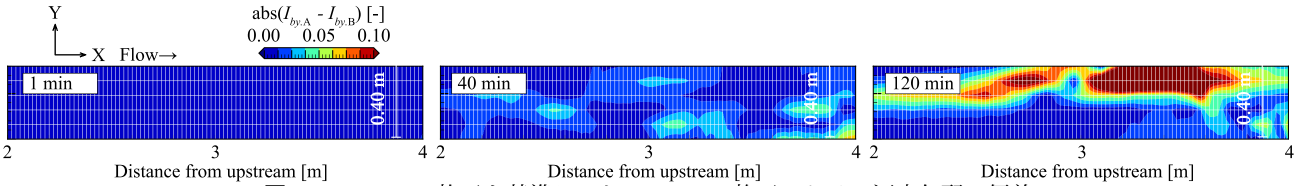
図–3 は上から 2 × 2 cm 格子における河床勾配に対する 2 × 8 cm 格子における河床勾配の偏差を時刻ごとに示したものである．ここでは**図–2** の計算誤差や微分の定義式に従い，最も細かい空間分解能である 2 × 2 cm 格子の河床勾配を比較対象とし，空間分解能を低下させた場合の河床勾配の再現性について議論する．



図–1 計測結果（上図：底面形状，下図：水深）



図–2 水深の計測値と計算値の差分値（上図：2 × 2 cm，下図：2 × 8 cm）



図–3 2 × 2 cm 格子を基準とした 2 × 8 cm 格子における河床勾配の偏差

同図より通水 1 分では，河床勾配の偏差はほとんど 0 であることがわかる．通水 40 分から 120 分にかけて交互砂州が発生・発達すると，砂州の前縁部や淵において偏差が増大し，再現性の低下が確認できる．また，河床勾配の再現性の低下箇所と計算誤差が増大する箇所を比較すると，両者の箇所が概ね一致していることから，両者の間の対応関係の存在が推測される．

4 空間分解能の影響の理論的評価

前章の結果から，計算誤差が増大する要因は，空間分解能が低下したことによる微分値の再現性の低下であることが示唆された．本章では，空間分解能と微分値の再現性について理論的に考察する．ここではスタガード格子における中央差分を対象とし，以下の打ち切り誤差の算定式を用いて上記について考察する．

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{f(x+\frac{1}{2}m\Delta x) - f(x-\frac{1}{2}m\Delta x)}{m\Delta x} - \frac{m^2}{24}\Delta x^2 \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3} + O(\Delta x^3) \quad (1)$$

ここで，$f(x)$ は x を独立変数とする従属変数，x は距離，Δx は離散間隔，m は Δx に対する倍数である．

式 (1) の右辺第一項は数値計算で計算される部分であり，第二項以降は打切り誤差である．式 (1) から，任意の Δx に対して離散間隔を m 倍に増やした時に，その打切り誤差は m^2 で増大することがわかる．**図–2** と**図–3** に示した結果は横断方向に 2, 4, 8 cm と空間分解能を低下させている．2 cm における打切り誤差を基準とすると，4 cm で 4 倍，8cm で 16 倍に誤差が増大することが推測できる．

上記はあくまで 2 cm を基準とした場合における打切り誤差の増加量であり絶対量ではない．数値計算に必要な空間分解能のさらなる議論には打切り誤差の絶対量の定量化が課題となるものの，少なくとも必要な空間分解能は，式 (1) の右辺第一項と第二項以降の打切り誤差とのバランスを考慮して Δx と m を決定すれば良いことが示唆される．

5 おわりに

本研究では，数値計算と打切り誤差の理論式のそれぞれを用い，交互砂州上の流れを再現する数値計算に要求される空間分解能について調べた．交互砂州が発達し，その底面形状の勾配や曲率が大きくなる．この時に，数値計算の空間分解能がこれらの底面形状の勾配などを十分に記述できなくなると，数値計算の誤差が増大することを示した．なお，本研究では固定床の計算を対象としたが，時間発展する移動床の計算の場合には更なる誤差増大が予想される．

参考文献

1) 石原 道秀, 安田 浩保: 交互砂州の移動速度の空間分布とその時間的な変化, 土木学会論文集 A2 分冊（応用力学）76 巻 2 号, pp. I_469–I_480, 2021.
2) 今村文彦，後藤智明：差分法による津波数値計算の打ち切り誤差，土木学会論文集, No.375, pp.241-250, 41, 1986.
3) 星野剛，安田浩保，倉橋将幸：交互砂州の形成機構の解明に向けた水面と底面の同時計測手法の開発，土木学会論文集 A2(応用力学)，74 巻 1 号，pp.63–pp.74，2018.
4) 北海道河川財団，http://i-ric.org.