

# 軌道座屈解析のための通り変位原波形復元に適した偏心矢法

新潟大学大学院自然科学研究科 学生会員 中川 慧  
 新潟大学工学部 正会員 阿部 和久  
 新潟大学工学部 正会員 紅露 一寛

## 1 はじめに

鉄道軌道のレール継ぎ目部は、軌道破壊や乗り心地の悪化、騒音などにつながり弱点箇所となる。その解決策としてロングレールの導入が挙げられる。しかし、ロングレールはまくらぎにより拘束されるため、中央部が不動区間となり、温度変化によるレール軸力が発生する。特に、夏の高温時において、軌道座屈が発生する可能性が高まる。そのため、ロングレールでは座屈の保守管理を適切に行う必要がある。

鉄道軌道において、軌道座屈温度は、空間方向にばらつきを有する初期通り変位に大きく依存する。また、実際の初期通り変位はランダムな波形であるため、本研究室では初期通り変位と軌道座屈の確率的関係について検討してきた<sup>1)</sup>。

なお、近年は軌道初期通り変位が検測車両により高密度に測定可能となっている<sup>2)</sup>。その測定データから通り変位の原波形が復元できれば、それらを軌道座屈解析に反映することで座屈を生ずる箇所と温度を予測可能になると考えられる。また、通り変位原波形を取得する際、通常 10m 弦正矢データが用いられるが、10m 弦正矢では座屈特性の把握で不可欠となる 5m 波長成分が欠落するため、座屈予測解析には適さない。

そこで本研究では、まず偏心矢法の理論について考察し、原波形復元に適した偏心量を検討した後、偏心矢法に基づいた原波形復元法を構築し、その妥当性について検討する。

## 2 偏心矢

偏心矢とは、図-1 のように、レールに任意の長さ  $l$  の弦をあて、弦の任意点  $x$  とレールとの距離により与えられるものである。

よって、偏心矢  $z(x)$  は次式により表すことができる。

$$z(x) = y(x) - \left\{ \frac{b}{l}y(x-a) + \frac{a}{l}y(x+b) \right\} \quad (1)$$

ここで、 $y(x)$  は通り変位原波形、 $a, b$  は点  $x$  から弦の両端点までの距離である。

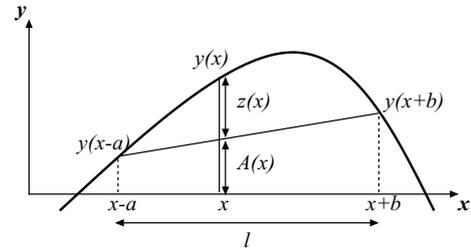


図-1 偏心矢

式 (1) をフーリエ変換すると次式を得る。

$$\hat{z}(k) = \hat{y}(k) \left\{ 1 - \frac{b}{l}e^{-ika} - \frac{a}{l}e^{ikb} \right\} \quad (2)$$

ここで、 $k$  は波数、 $\hat{z}, \hat{y}$  は  $z$  と  $y$  の Fourier 変換である。

式 (2) において  $A(k) = 1 - \frac{b}{l}e^{-ika} - \frac{a}{l}e^{ikb}$  とおくと、 $\hat{y}(k)$  は次式で求めることができる。

$$\hat{y}(k) = \frac{\hat{z}(k)}{A(k)} \quad (3)$$

いかなる波数  $k$  においても偏心矢の Fourier 変換  $\hat{z}$  から原波形 Fourier 変換  $\hat{y}$  を復元可能とするためには、 $A(k) \neq 0$  が必要である。

なお、 $A(k) = 0$  となる条件は次式で与えられる。

$$\frac{b}{l}e^{-ika} - \frac{a}{l}e^{ikb} = 1 \quad (4)$$

ここで、 $\kappa = kl, \alpha = a/l, \beta = b/l (\alpha + \beta = 1)$  とおき、 $\alpha$  と  $\kappa$  を用いて表すと次式が成り立つ。

$$(1 - \alpha)e^{-i\kappa\alpha} + \alpha e^{i\kappa(1-\alpha)} = 1 \quad (5)$$

以上より、式 (5) を満たすような  $\alpha, \kappa$  を求める。

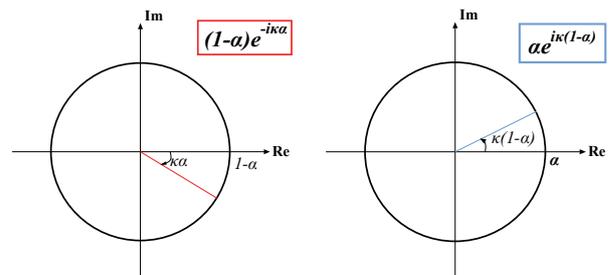


図-2  $(1 - \alpha)e^{-i\kappa\alpha}$  と  $\alpha e^{i\kappa(1-\alpha)}$  の複素平面表現

式 (5) の  $(1 - \alpha)e^{-i\kappa\alpha}$  と  $\alpha e^{i\kappa(1-\alpha)}$  について、図-2 のようにそれぞれ複素平面上で考える。

$(1-\alpha)+\alpha=1$ となるので、図-2より、 $(1-\alpha)e^{-i\kappa\alpha}$ と $\alpha e^{i\kappa(1-\alpha)}$ が同一直線上、つまり実軸上に存在する場合に式(5)が成り立つことがわかる。

したがって、求める条件は次式のようなになる。

$$\begin{cases} \kappa\alpha = 2n\pi & (6) \\ \kappa(1-\alpha) = 2m\pi & (7) \end{cases}$$

ここで、 $n, m$  は自然数である。

これを $\alpha$ について解くと、次の関係式を得る。

$$\alpha = \frac{n}{n+m} \leq \frac{1}{2} \quad (8)$$

また、 $\kappa$ の関係式は次式のようなになる。

$$\kappa = 2\pi(m+n) \geq 4\pi \quad (9)$$

以上より、 $\alpha$ が有理数のとき、式(9)の $\kappa$ において $A(k) = 0$ となり、式(3)より $\hat{y}$ を求めることができなくなる。逆に、式(8)より、いかなる $k$ においても $A(k) \neq 0$ となるためには、 $\alpha$ が無理数であることが必要となる。

### 3 適切な偏心率

$A(k) = 0$ となる $(\alpha, \kappa)$ の関係を図-3に示す。座屈解析において、 $k < 4\pi/5$ (波長 2.5m 以下)の範囲で原波形を復元する必要がある。これに対応する $\kappa$ は $\kappa = kl$ より、 $\kappa < 8\pi$ となる。また、偏心矢の測定精度の観点から、 $\alpha$ はできるだけ $1/2$ に近い値とすることが望ましい。

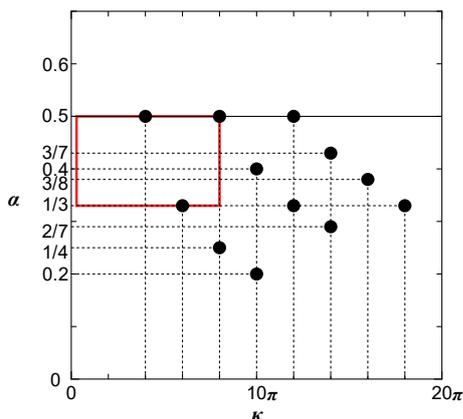


図-3  $A = 0$ となる $(\alpha, \kappa)$

以上より、図-3の赤枠線内で次の条件に基づいて最適な $\alpha$ を探索することとする。

$$\max_{\alpha} \left( \min_{\kappa} |A(\kappa)| \right), \left( \frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}, \kappa_0 < \kappa < 8\pi \right) \quad (10)$$

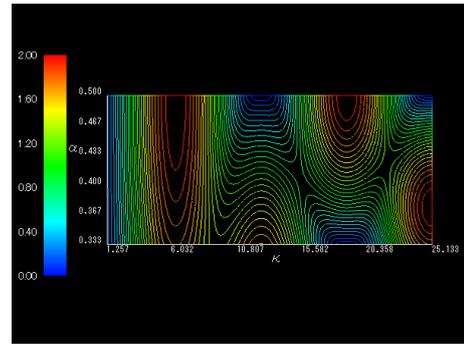


図-4  $|A(\alpha, \kappa)|$ の分布

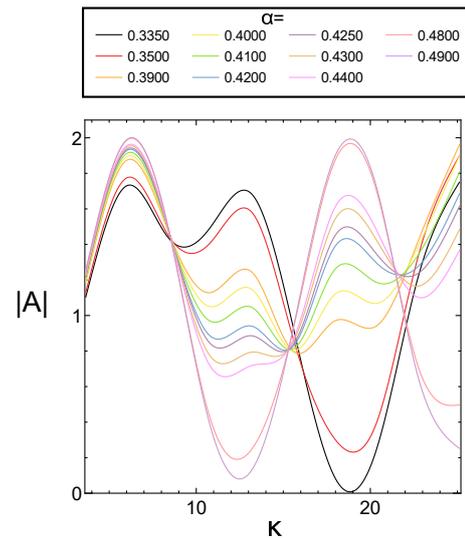


図-5 各 $\alpha$ における $|A(k)|$ の分布

ここで、 $\kappa_0$ は座屈に影響を及ぼす波数の下限値であり、今回は波長が50m以上の成分を取り除くこととした。これに基づいて波数の下限値 $\kappa_0$ を求めると、 $\kappa_0 = 2\pi/5$ となる。

図-3の赤枠線内において、 $|A(\alpha, \kappa)|$ の分布を求めた結果を図-4に示す。図-4において青色で描かれている領域では $|A(k)|$ が非常に小さな値をとる。よって、図中の領域の上下端付近の $\alpha$ は本目的には適さないことがわかる。

$\alpha$ の影響をより詳細に調べるために、いくつかの $\alpha$ の下で、 $|A(k)|$ の分布を求めてみた。その結果を図-5に示す。図-5より、 $|A(k)|$ の最小値が最も大きな値をとる $\alpha$ の値は、0.42前後となることがわかる。なお、その時の $|A(k)|$ の最小値は約0.8となっており、式(3)に基づき偏心矢から原波形を復元するために十分な精度が確保できるものと考えられる。ちなみに、弦長を10mとする場合、この最適条件は $a = 4.2\text{m}$ 、 $b = 5.8\text{m}$ に相当する。

以上より、今回原波形復元に適切な偏心率は、およそ0.42であることがわかった。

#### 4 通り変位原波形の復元

$\Delta x$  間隔で測定された偏心矢を  $z_j = z(x_j)$  とおく。なお、 $x_j$  は次式で与えられる。

$$x_j = j\Delta x \quad (j = 0, \dots, N-1) \quad (11)$$

ここで、 $\Delta x = L/N$  で与えられ、 $L$  は測定長、 $N$  は測定点数である。

$z(x)$  の Fourier 変換を次式で近似評価するものとする。

$$\hat{z}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} z(x)e^{-ikx} dx \doteq \sum_{j=0}^{N-1} z_j e^{-ikx_j} \Delta x \quad (12)$$

すると、 $\hat{y}(k)$  は次式で与えられる。

$$\hat{y}(k) = \frac{\hat{z}}{A(\alpha, \kappa)} = \Delta x \sum_{j=0}^{N-1} \frac{z_j}{A(\alpha, \kappa)} e^{-ikx_j} \quad (13)$$

また、 $y(x)$  は  $\hat{y}(k)$  の逆 Fourier 変換により次式で与えられる。

$$y(x) = \frac{\Delta x}{2\pi} \sum_{j=0}^{N-1} z_j \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx_j}}{A(\alpha, \kappa)} e^{-ikx} dk \quad (14)$$

$x_m$  における  $y(x_m)$  を  $y_m$  とおくと、次式を得る。

$$y_m = \frac{\Delta x}{2\pi} \sum_{j=0}^{N-1} z_j \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ik(m-j)\Delta x}}{A} dk \quad (15)$$

$A(\alpha, -\kappa) = \bar{A}(\alpha, \kappa)$  なので、式 (15) の被積分関数は、 $-k$  において  $k$  での関数値の共役を与える。よって、式 (15) より次式を得る。

$$y_m = \frac{\Delta x}{\pi} \sum_{j=0}^{N-1} z_j \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ikx_j}}{A(\alpha, \kappa)} e^{-ikx} dx \quad (16)$$

式 (16) で求めた  $y_m$  は実数値で与えられる。

式 (16) の積分を離散近似する場合を考える。 $\Delta k = 2\pi/L$ 、 $k_n = n\Delta k$  とおくと、 $\Delta x = L/N$  より、次式を得る。

$$y_m = \frac{2}{N} \sum_j z_j \operatorname{Re} \sum_n \frac{e^{-in(m-j)\frac{2\pi}{N}}}{A(\alpha, \kappa_n)} e^{-ikx} dx \quad (17)$$

ここで、 $\kappa_n = k_n l$  である。

#### 5 初期通り変位の生成

通り変位波形の標準偏差を  $\sigma$ 、通り変位の相関長を  $d$  とし、原波形の距離相関関数を次式により表すこととする。

$$R(x) = \frac{\sigma^2}{1 + (\frac{x}{d})^2} \quad (18)$$

長さ  $L$  の軌道区間を、 $N+1$  個の測点数で等分割する。レール通り変位波形の  $x_i$  における値を  $w_{0i}$  とし、その離散データを成分にもつベクトルを  $\{\mathbf{W}_0\}$  とおく。当該ベクトルに関する分散・共分散行列を  $[\mathbf{C}]$  とすると、 $\{\mathbf{W}_0\}$  は次式により生成することができる。

$$\{\mathbf{W}_0\} = [\Phi][\Lambda^{1/2}]\{\xi\} \quad (19)$$

ここで、 $[\Lambda^{1/2}]$  は  $[\mathbf{C}]$  に関する固有値問題の固有値の平方根  $\sqrt{\lambda_i}$  を対角項に持つ対角行列、 $[\Phi]$  は固有ベクトル  $\{\phi_i\}$  を縦ベクトル成分に持つ行列、 $\{\xi\}$  は期待値ゼロ、分散 1 の標準正規乱数を成分に持つベクトルである。

#### 6 原波形復元に要求される条件

偏心矢の弦長を  $l$ 、 $a : b = m : n$  ( $m, n$  は自然数)、復元する区間長を  $L$ 、測定間隔を  $\Delta x$  とし、測定点数は  $N = L/\Delta x$  であるとする。

偏心矢で  $A = 0$  となる  $\kappa$  は式 (9) により与えられているので、これに対応する波数  $k_0$  は次式となる。

$$k_0 = \frac{\kappa}{l} = \frac{2\pi(m+n)}{l} \quad (20)$$

座屈解析で復元すべき最小波長を  $\lambda_{min}$  とおくと、これに対する最大波数  $k_{max}$  は次式で与えられる。

$$k_{max} = \frac{2\pi}{\lambda_{min}} \quad (21)$$

原波形復元において、 $k_{max}$  以下の波数成分が適切に求められる必要がある。よって、 $A = 0$  を与える  $k_0$  は、 $k_{max}$  より大きい必要があり、次の関係が要求される。

$$k_{max} = \frac{2\pi}{\lambda_{min}} < \frac{2\pi(m+n)}{l} = k_0 \quad (22)$$

よって、次の条件が得られる。

$$l < (m+n)\lambda_{min} \quad (23)$$

$l$  と  $a : b$  はこの式を満たすように設定する必要がある。

次に離散逆 Fourier 変換より原波形復元する場合を考える。波数増分  $\Delta k$  は  $2\pi/L$  で与えられる。逆 Fourier 変換の波数の上限を  $N/2$  項まで取るとすると、積分区間における上限波数  $k_M$  は次式で与えられる。

$$k_M = \Delta k \times \frac{N}{2} = \frac{2\pi}{L} \times \frac{1}{2} \times \frac{L}{\Delta x} \quad (24)$$

すると、 $k_M < k_0$  となる必要がある。

また、復元計算で、 $k_{max}$  の成分が少なくとも評価される必要があるので、 $k_{max} < k_M$  が必要となる。よって、次の関係が要求される。

$$k_{max} < k_M < k_0 \quad (25)$$

式 (20), (21), (24) より、次式を得る。

$$\frac{2\pi}{\lambda_{min}} < \frac{\pi}{\Delta x} < \frac{2\pi(m+n)}{l} \quad (26)$$

ここで、 $\lambda_{min} = 2.5(\text{m})$ 、偏心率  $\alpha = 0.42$  より、 $a : b = 21 : 29$ 、 $l = 10(\text{m})$  とすると、式 (27) は多少の計算の後、次の関係式で与えられる。

$$0.1 < \Delta x < 1.25 \quad (27)$$

以上より、測定間隔  $\Delta x$  は、式 (28) のような範囲で設定すればよい。

## 7 解析結果

表-1 各設定値

$N(\text{個})$	2000
$\Delta x(\text{m})$	0.25
$d(\text{m})$	2.84
$\sigma_\varepsilon(\text{m})$	0.0005
$\sigma(\text{m})$	0.005
$l(\text{m})$	10

今回の解析では、軌道観測点数を 2000 個、観測点間隔を 0.25m とし、軌道の測定区間長を 500m とした。その他の各種設定値は表-1 のように与えた。なお、表-1 において  $\sigma_\varepsilon$  は偏心矢の測定ノイズの標準偏差であり、通り変位原波形の標準偏差は 5mm とし、通り変位の相関長  $d$  は 2.84m と推定された。

偏心率が 0.42 のときの通り変位原波形の復元結果を図-6 に示す。図より、概ね原波形の一致が良好であり、今回の手法によって原波形を復元可能であることがわかる。

また、この他の偏心率における原波形復元結果も概ね良好であったが、一部の偏心率においては復元が

困難であることがわかった。その一例を図-7 に示す。図-7 では、偏心率が 0.40 に限りなく近い値で原波形復元を試みたが、復元波形ではノイズが拡大され、原波形が適切に復元されていない様子が確認できる。これは図-3 より、偏心率が 0.40 のときは  $A(\alpha, \kappa) = 0$  なる波数成分を有しているため、原波形復元の際に、当該波数成分が式 (25) の条件を満たさなかったことが原因である。

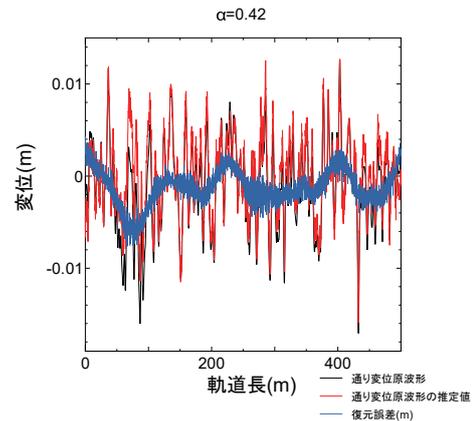


図-6 原波形復元結果

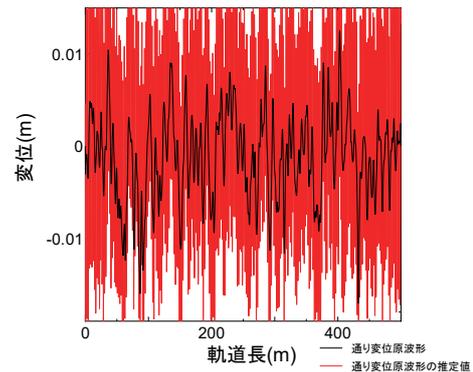


図-7  $\alpha = 0.40$  近傍の復元結果

## 8 おわりに

本研究では、偏心矢データから原波形復元する手法を構築するため、復元に適した偏心率を求めた後、原波形復元を行った。その結果、本推定法でも十分な精度で通り変位原波形を復元することができるという結果を得た。

謝辞 本研究は科研費 (20K04661) の助成を受けたものである。

## 参考文献

- 1) 阿部和久, 水野雄太, 紅露一寛: 通り変位波形におけるバラツキが軌道座屈強度の確率特性に及ぼす影響, 鉄道工学シンポジウム論文集 24 号 167-174, 2020.
- 2) 坪川洋友, 矢澤英治, 小木曾清高, 南木聡明: 車体装架型慣性正矢軌道検測装置の開発, 鉄道総研報告, 26(2), 7-12, 2012.