減衰を考慮した軌道系の分散解析

新潟大学大学院自然科学研究科　学生会員　袴田 翔太
新潟大学工学部　正会員　阿部 和久
新潟大学工学部　正会員　紅露 一寛

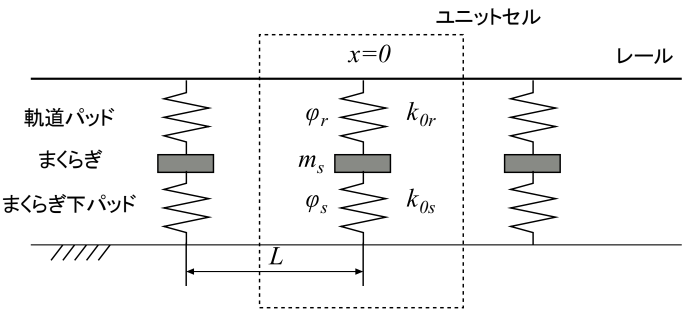
1　はじめに

鉄道軌道系の振動応答を理解する上で，軌道に沿った波動モードの分散特性を理解することは重要である．軌道の分散曲線は系にエネルギーを投入することなく無限遠まで波が伝わるような周波数 f と Floquet 波数 κ の関係を与える点の集合により構成される [1)]．一般に，円振動数 ω に対する Floquet 波数 κ の固有値は複素数値を取りうるが，κ が実数値をとるとき，減衰せずに無限遠まで伝播するモードを得る．一方で κ が複素数値を取る場合は振動しながら減衰するモードが得られる．実際の軌道ではゴムパッドによる支持により減衰が存在するため波動振幅は次第に減少する．減衰の存在により複素空間での分散曲線が減衰を加える前の曲線からどの程度乖離するかを見ることで，どのモードがどれくらい影響を受けるのかを評価できる．本研究では，複素波数-周波数空間内で分散曲線を求め，パッド類の減衰が軌道分散特性に及ぼす影響について調べる．

2　波動モード条件式の導出

2.1　モデル化

本研究で対象とする軌道モデルを**図-1** に示す．無限長レールのモデル化には Timoshenko ばりモデルを用い，等間隔 L で離散支持され，まくらぎを質量 m_s の質点で与える．軌道パッドとまくらぎ下パッドについては，それぞれ複素剛性 k_r，k_s で与える．なお，当該軌道系は剛な基盤上に置かれているものとする．



図–1　軌道モデル

2.2　ユニットセルの運動方程式

図-1 に示した軌道モデルにおけるレールの自由振動問題は円振動数 ω の定常状態を対象とすると，次の運動方程式で与えられる [2)]．

$$
\begin{aligned}
&GAK\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)-\rho A\omega^2 u+k_e u\delta_L(x)=0,\\
&GAK\left(\psi-\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\rho I\omega^2\psi+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ここで，u，ψ はレールたわみおよび断面回転角，x は**図-1** に示すような軌道長手方向座標である．また，G はせん断弾性係数，A ははりの断面積，K はせん断係数，I は断面二次モーメント，E はヤング率，ρ ははりの密度である．$\delta_L(x)$ は $x=jL(j=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ に特異点を持つ周期デルタ関数，k_e はまくらぎ・パッド類により与えられる動的等価剛性である．なお，まくらぎの動的等価剛性 k_e は次式で与えられる．

$$
k_e=\frac{k_r(k_s-m_s\omega^2)}{k_r+k_s-m_s\omega^2}
\tag{2}
$$

このとき，円振動数 ω での周期構造の定常解に対し，次の Floquet 原理が成り立つ．

$$
\psi(x+L)=e^{-i\kappa L}\psi(x),u(x+L)=e^{-i\kappa L}u(x)
\tag{3}
$$

ここで，κ は Floquet 波数である．

2.3　波動モードの固有方程式

式 (3) の周期境界条件を満たすように，u，ψ を次式により Fourier 級数で表す [3)]．

$$
\begin{aligned}
u(x,\kappa)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}u_n(\omega,\kappa)e^{-iz_n x},\\
\psi(x,\kappa)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\psi_n(\omega,\kappa)e^{-iz_n x},\\
z_n&=\frac{2n\pi}{L}+\kappa
\end{aligned}
\tag{4}
$$

ここで，u_n，ψ_n はそれぞれ，Fourier 級数の展開係数である．

式 (1) における $\delta_L(x)$ は周期 L の周期関数であり，次

式により表すことができる．

$$\delta_L(x) = \frac{1}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{2n\pi}{L}x} = \frac{1}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{2n\pi}{L}x} \tag{5}$$

式 (3) の周期条件より，無限長周期軌道は**図-1** に示すようにまくらぎ一区間で与えられるユニットセルの問題に限定して議論できる．ユニットセルのまくらぎ支持位置を $x=0$ ととると，ユニットセル内（$|x| < \frac{L}{2}$）において，$\delta_L(x) = 0 (x \neq 0)$ が成り立つので，$\delta_L(x)$ は次式のように表すことができる．

$$\delta_L(x) = \frac{1}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i(\frac{2n\pi}{L}+\kappa)x} = \frac{1}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{iz_n x} \tag{6}$$

式 (5)，(6) より，式 (1) 第 1 式中の $u\delta_L(x)$ の項は次式のように記述できる．

$$\begin{aligned} u\delta_L(x) &= \frac{1}{L}\sum_{n,m=-\infty}^{\infty} u_n e^{iz_n x} e^{i(\frac{2n\pi}{L}+\kappa)x} \\ &= \frac{1}{L}\sum_{n,m=-\infty}^{\infty} u_n e^{-i[\frac{2\pi}{L}(n-m)+\kappa]x} \\ &= \frac{1}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\sum_{m=-\infty}^{\infty} u_{n+m}) e^{-iz_n x} \\ &= Z\delta_L(x), \\ Z &:= \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n \end{aligned} \tag{7}$$

式 (4)，(7) を式 (1) に代入し次の方程式を得る．

$$\begin{aligned} &GAK(-iz_n\psi_n + {z_n}^2 u_n) - \rho A\omega^2 u_n + \frac{k_e}{L}Z = 0, \\ &GAK(\psi_n + iz_n u_n) - \rho I\omega^2 \psi_n + EI{z_n}^2\psi_n = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

式 (8) より，u_n について解くと次式を得る．

$$\begin{aligned} &u_n = -\frac{k_e}{L}\frac{Z}{X_n}, \\ &X_n := GAK{z_n}^2 - \rho A\omega^2 - \frac{(z_n GAK)^2}{GAK - \rho I\omega^2 + EI{z_n}^2} \end{aligned} \tag{9}$$

式 (9) の両辺の n についての総和を求めると，次式を得る．

$$(1 + \frac{k_e}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{X_n})Z = 0 \tag{10}$$

式 (4) より，次の関係が成り立つ．

$$u(0,\kappa) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n = Z \tag{11}$$

一般に，まくらぎ支持点においてもレールたわみは 0 とはならないので，$u(0,\kappa) \neq 0$ である．したがって，式 (11) より，次式を得る．

$$f(\kappa,\omega) := 1 + \frac{k_e}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{X_n} = 0 \tag{12}$$

式 (12) は軌道内を伝播する波動モードの存在条件である．よって，式 (12) を満たす (κ,ω) 空間内の点の集合として分散曲線が与えられることとなる．

3　解析結果

3.1　解析条件

本研究では 50 kgN レールを対象に解析を行う．Floquet 原理の適用では，1 ユニットをまくらぎ位置を中心として抽出する．なお，まくらぎ間隔は $L = 60\,\mathrm{cm}$ とし，まくらぎ質量 m_s は 100 kg とする．また，軌道パッドとまくらぎ下パッドのばね定数をそれぞれ 80 MN/m および 30 MN/m とする．軌道パッド，まくらぎ下パッドの減衰を loss factor で表現する場合，複素剛性 k_r，k_s は次式で与えられる．

$$k_r = k_{r0}(1 + i\varphi_r), k_s = k_{s0}(1 + i\varphi_s) \tag{13}$$

ここで，k_{r0}，k_{s0} は軌道パッド，まくらぎ下パッドのばね定数，φ_r，φ_s は軌道パッド，まくらぎ下パッドの loss factor である．また，減衰が弾性ばねとダッシュポッドで構成される Voigt モデルで与えられている場合，k_r，k_s は次式で与えられる．

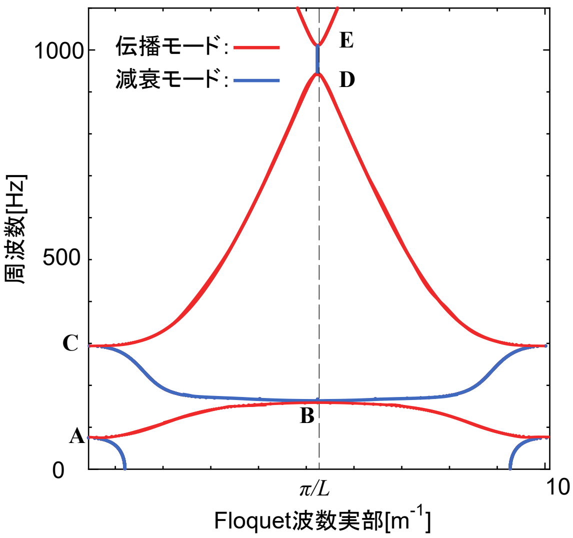
$$k_r = k_{r0} + i\omega\eta_r, k_s = k_{s0} + i\omega\eta_s \tag{14}$$

ここで，η_r，η_s は減衰係数である．

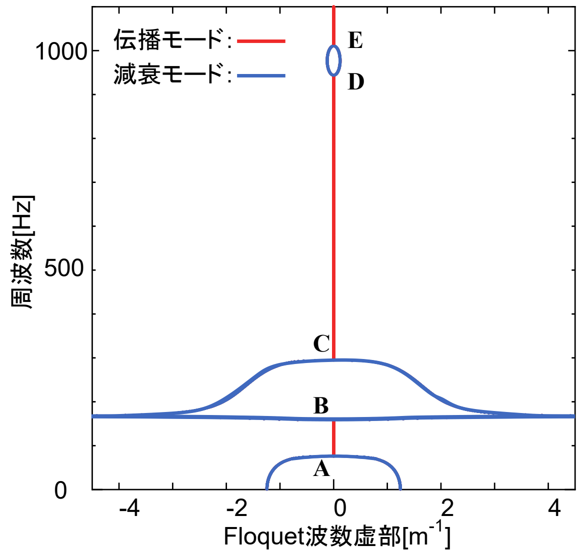
3.2　無減衰軌道モデルの分散曲線

対象とした軌道モデルの基本特性を確認するために，パッド類を無減衰として解析を行った．得られた分散曲線を Floquet 波数実部と周波数，および Floquet 波数虚部と周波数によって与えられる平面に射影したものをそれぞれ**図-2**，**図-3** に示す．なお，これらにおいては，Floquet 波数が実数値で与えられる伝播モードに対する分散曲線を赤色，複素数で与えられている減衰モードを青色で示している．**図-2** に示すように，

Floquet 波数実部を軸にとる分散曲線は，$\kappa = \pi/L$ に対して対称性を有している．これは波動の伝播方向に本質的差異がないことを意味する．そのため，通常は $0 \leq \kappa \leq \pi/L$ の範囲の分散曲線のみを図示するが，ここでは Floquet 波数空間内の分散曲線の一周期分すべてを示している．**図-2** において A-B 間の赤色の分散曲線はまくらぎが大きく振動するモードを，また C よりも高周波数域のものはレール振動が支配的となるモードを与える．また，A-B 間，C-D 間がパスバンド，A 以下，B-C 間，D-E 間がストップバンドを与える．一方，**図-3** において B-C 間のストップバンドを見ると点 B から 200 Hz 付近にかけて大きな減衰を伴いながら点 C へと分散曲線が分布していることが確認できる．



図–2　Floquet 波数実部-周波数平面における無減衰系の分散曲線



図–3　Floquet 波数虚部-周波数平面における無減衰系の分散曲線

3.3　パッド類の減衰が分散曲線に及ぼす影響

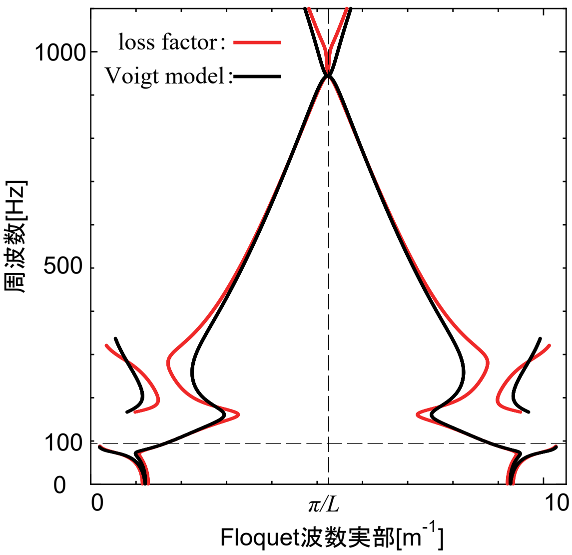
パッド類の loss factor を正の値に設定し，系に減衰を導入することで，複素分散曲線がどのように変化するかについて考察を行う．パッド類の loss factor を 0.2 に設定して求めた分散曲線を Floquet 波数実部-周波数平面，および Floquet 波数虚部-周波数平面に射影したものをそれぞれ，**図-4**，**図-5** に赤線で示す．**図-4**，**図-5** より，パッド類の減衰導入によって 400 Hz 以下の分散曲線が大きく影響を受けていることがわかる．**図-5** において**図-3** の A-B 間，C 付近に相当する部分は減衰導入により，複素数値をとる減衰モードへと変化していることが明確に判断できる．**図-2** の A-B 間の波動モードは主にまくらぎの振動が卓越するものであり，まくらぎにより大きく伸縮の影響を受けるパッド類の減衰が 400 Hz 以下の低周波数域に顕著に現れたものと考えられる．一方で，C 以上に分布する分散曲線はレール振動が支配的となるモードの存在を示すものであり，パッド減衰の影響は比較的小さいものと推測される．このことは，**図-5** に示すように，400 Hz 以上の周波数域の分散曲線の Floquet 波数虚部が非常に小さい値をとっていることからも確認できる．

3.4　減衰モデルの違いが分散曲線に及ぼす影響

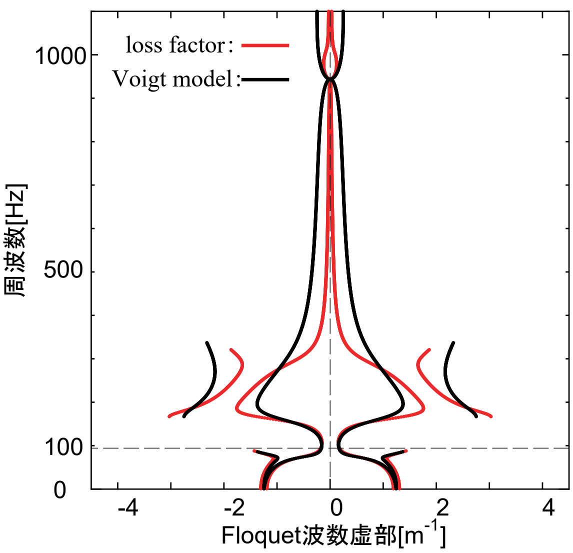
パッド類の減衰を式 (13) により loss factor で表現した場合と，式 (14) の Voigt モデルで表した場合を比較する．ここで，Voigt モデルの減衰係数が 100 Hz において，軌道パッドとまくらぎ下パッドの loss factor をともに 0.2 とした場合と一致するように求めた分散曲線を**図-4**，**図-5** に黒線で示す．これらの図から，両モデルについて求めた分散曲線が 100 Hz で一致していることが確認できる．

また，Floquet 波数実部を横軸に設定した**図-4** では減衰モデルによる違いが 300 Hz 前後の周波数帯では明らかであるものの，それ以外の周波数帯では顕著な差は認められなかった．一方で，Floquet 波数虚部を横軸にとった**図-4** では，100 Hz 以上の周波数帯でモデルによる差異が顕著であることがわかる．Voigt モデルに対応する loss factor は周波数に比例する．したがって，100 Hz を基準とした本解析において，それより高周波数域では loss factor により減衰を表した

モデルに比べ，減衰が過剰となる．なお，周波数の値を順次変え，式 (14) の η_r，η_s を loss factor に合わせそれぞれ設定し，分散曲線を求めたところ，設定した周波数域では両モデル間で曲線の一致が見られた．一般に，パッド類の loss factor は 500 Hz 付近までは一定値をとり，それより高周波数域で緩やかに増加する傾向があると示されている [4]．Voigt モデルではこのような減衰特性を表現することができないため，**図-5** に示したように広周波数域にわたり波動の減衰特性を表現することは困難なことが窺える．



図–4　減衰モデルの違いが分散曲線に及ぼす影響（Floquet 波数実部-周波数平面における無減衰系の分散曲線）



図–5　減衰モデルの違いが分散曲線に及ぼす影響（Floquet 波数虚部-周波数平面における無減衰系の分散曲線）

4　おわりに

パッド類の減衰が軌道の分散特性に及ぼす影響について検討を行った．パッド類の減衰を周波数に依存しない一定の loss factor でモデル化した場合，減衰の影響は主に 400 Hz 以下の低周波数域におけるまくらぎが大きく揺れるモードで顕著に現れる一方で，それより高周波数域に分布するレール振動が支配的となるモードでは比較的小さくなっていることが確認できた．また，パッド類の減衰のモデル化の違いによる分散曲線への影響についても検討した．一定の loss factor で減衰を与えた場合と，ばねとダッシュポッドから構成される Voigt モデルを用いて減衰を表現した場合とで比較を行った．その結果，Voigt モデルでは，あらかじめ設定した周波数域においては分散曲線の一致が見られたものの，Voigt モデルに対応する loss factor は周波数に比例することから，当該周波数域よりも上の領域においては過剰な減衰が認められた．パッド類のモデル化において，Voigt モデルが広く用いられる時間域解析の場合，広範囲にわたり軌道の動特性について調べる際には，減衰定数の設定には注意する必要がある．

今回の解析には，減衰を表現するためにレールとまくらぎの間に点支持の複素ばねモデルを用いた．しかしながら，実際の軌道において，軌道パッドおよびまくらぎ下パッドの面積は 20 cm 四方程度である．この値は，まくらぎ間隔が約 60 cm であるのに対し，無視できない値であるといえる．そのため，これまで分散解析に広く用いられてきた点支持モデルに対し，分布ばね支持による軌道モデルの再現が有用であるかを判断する必要がある．今後は，パッド類による支持条件を点支持から面支持に換えることで，より現実に即したモデルに変更して，その影響について検討する．

参考文献

1) 阿部和久，古谷卓稔，紅露一寛：まくらぎ支持された無限長レールの波動伝播解析，応用力学論文集 Vol.10, pp.1029-1036，2007.

2) 清水沙希，阿部和久，相川明，紅露一寛：軸力を受けるレールの波動伝播特性，計算数理工学会論文集 9 巻 67-72，2009.

3) 阿部和久，山田高也，古田勝，末原美智子，紅露一寛：地下鉄トンネル・地盤連成系の三次元加振応答解析，土木学会論文集 A2(応用力学)，Vol.74，No.2（応用力学論文集 Vol.21），I523-I534，2018.

4) Tompson,D.　:　Railway noize and vibration,chap.3,Elsevier,2009.