移動床水理の時系列解析へのDMDの導入

新潟大学大学院自然科学研究科　学生員　○齊藤　浩輝
新潟大学災害・復興科学研究所　正会員　安田　浩保

1　はじめに

近年, 様々な分野に適用できる研究手法としてデータ駆動型解析が注目されている．その一つとして, 複雑な物理現象である乱流の解析を目的として提案された動的モード分解 (DMD, Dynamic Mode Decomposition) がある [1)]．DMD は時間発展する現象の高次元データの行列分解手法である．同様の行列分解手法に，固有直交分解 (POD, Proper Orthogonal Decomposition) がある．両者の違いは，POD は空間の構造のみに着目した分解を行うのに対し，DMD は現象の空間・時間の両方に着目した分解を行い，コヒーレント構造である DMD mode を得る．

物理現象のデータ駆動型解析では時間的に連続した観測ビッグデータが必要となる．しかし，現状では，いずれの物理現象の観測ビッグデータの測定法もほとんど未確立である．このため，データ駆動型解析の真価を発揮させせらない．一方で, 茂木ら [2)] は, 河床波の発達過程における空間・時間ともに高分解能な計測法を開発し，実測データのデータ駆動型の解析を可能とした．本研究では，DMD による解析の具体例を交えながら，移動床水理における DMD を用いた Equation Free な時系列解析の有用性を示す.

2　Dynamic Mode Decomposition

この章では，現象の時系列データ $\{\vec{x_0}, \vec{x_1}, \cdots, \vec{x_n}\}$ を用いた DMD による時系列解析の手順を述べる．ここで，$\vec{x_n}$ は時刻 n での m 個の観測値からなるベクトル，データの時間間隔は Δt である．DMD の計算には，実測データの使用を想定し，ノイズの影響を少なくすることができる特異値分解による計算法を用いる．

DMD は，時系列データから式 (1) に示す時刻をずらした 2 つの行列を定義し，これらの行列がある線形作用素 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{\mathbf{m}\times\mathbf{n}}$ を用いて，$\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ という関係が成り立つ，すなわち, 時刻 $0 \sim (n-1)$ の値から次の時刻 $1 \sim n$ の値を近似できるということを仮定する．この関係から，$\mathbf{A}$ の固有ベクトル・固有値であり，DMD mode の空間構造 $\mathbf{\Phi}$ とその時間発展の情報である $\mathbf{\Lambda}$ を導出し，現象を記述する．

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= [\vec{x_0}\,\vec{x_1}\cdots\vec{x_{n-1}}] \in \mathbb{R}^{m\times n} \\ \mathbf{X}' &= [\vec{x_1}\,\vec{x_2}\cdots\vec{x_n}] \in \mathbb{R}^{m\times n} \end{aligned} \tag{1}$$

$\mathbf{\Phi}$ と $\mathbf{\Lambda}$ の導出では, まず, 式 (2) に示す特異値分解を行う．ここで，r $(1 \le r \le m)$ は主要な特異値の数，$\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{C}^{r\times r}$ は r 個の特異値を対角成分にもつ対角行列，$\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{m\times r}$,$\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{r\times n}$ はユニタリー行列であり，$*$ は共役転置を意味する．このとき，$\mathbf{U}$ は POD mode と同一のものであり，特異値分解において，$\mathbf{X}$ を主要な成分とその他のノイズなどの成分に分解している．そのため，主要な成分に対応した特異値のみを用いることでノイズの影響を少なくできる．

$$\mathbf{X} = \mathbf{U\Sigma V}^* \tag{2}$$

次に, 特異値分解により得られた $\mathbf{\Sigma}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ を用いて式 (3) に表される $\mathbf{A}$ の余因子行列 $\tilde{\mathbf{A}} \in \mathbb{C}^{r\times r}$ の固有値分解を行い，固有ベクトル $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{r\times r}$，複素固有値 $\lambda_k = a \pm ib(k = 1, \cdots, r)$ を対角成分にもつ固有値行列 $\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{C}^{r\times r}$ を求める．これは，高次元な行列である $\mathbf{A}$ ではなく，次元削減された直交行列 U で射影された $\tilde{\mathbf{A}}$ を用いることで，高次元なデータに対しての計算を容易にしている．

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{U}^*\mathbf{X}'\mathbf{V\Sigma}^{-1} \tag{3}$$

さらに，Tu らに提案された exact DMD[3)] により，$\tilde{\mathbf{A}}$ の固有ベクトル $\mathbf{W}$ を用いて，式 (4) に示す $\mathbf{A}$ の固有ベクトル $\mathbf{\Phi}$ を求める．また，$\tilde{\mathbf{A}}$ が $\mathbf{A}$ と相似であるため，2 つの行列の固有値は等しい．

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{X}'\mathbf{V\Sigma}^{-1}\mathbf{W} \tag{4}$$

DMD では，導出された DMD mode を用いて，現象を式 (5) に示す連続力学系の時間発展式として記述できる．ここで，$\mathbf{\Omega}$ は $\omega_k = \ln(\lambda_k)/\mathrm{dt}$ を対角成分にもつ連続力学系に対応した固有値行列である．式 (5) では，初期値 $\vec{x_0}$ を固有ベクトル空間で $e^{\mathbf{\Omega t}}$ により時間発展させた後，実空間に戻すという操作をしている．これは，解析により得られた r 個の DMD mode の重ね合わせで現象を表現できることを意味しており，空間構造に対応した時間発展の情報である $\Psi_i = e^{\omega_i t}\phi_i^\dagger \vec{x_0}$ は，各時刻での空間構造の増幅率のようなものであり，それぞれの DMD mode ごとに各時刻での Ψ_i を空間構造 Φ_i に乗算した値を DMD mode の数だけ足し合わせて現象が表現される．

$$\vec{x_t} = \mathbf{\Phi} e^{\mathbf{\Omega} t}\mathbf{\Phi}^\dagger \vec{x_0} \tag{5}$$

3 DMD による波動現象の時系列解析

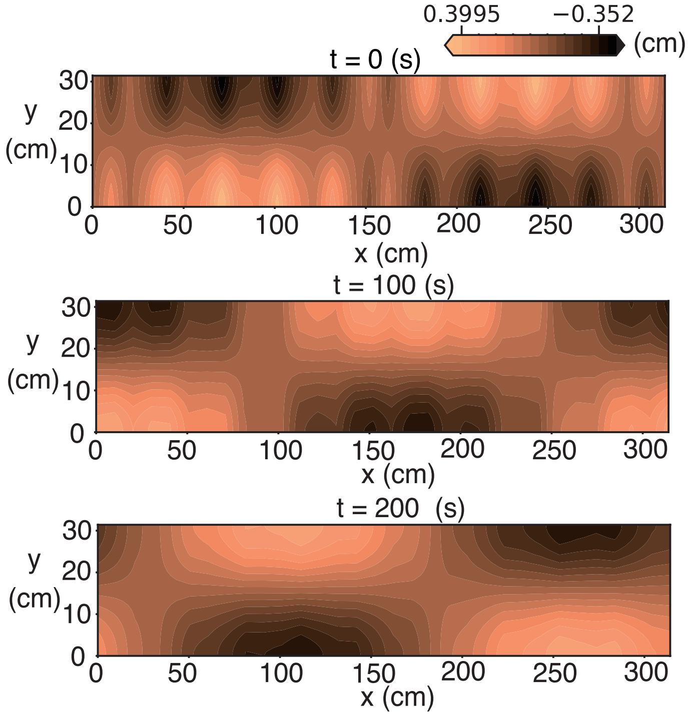
図–1 は，河床波が移流する過程を模した波動現象の 3 時刻のコンター図である．上段から下段に時間が経つにつれて，波長の短い小規模河床波のような形状と波長の長い中規模河床波のような形状が重ね合わさった状態から，波長の短い形状が減少し中規模河床波のような形状が卓越するように作成したものである．

図–2, **図–3** は，上記の波動現象を DMD により解析することで得られた DMD mode である．それぞれ，上段に示す空間構造には，波長の短い形状と長い形状の 2 つが得られた．また，下段に示す空間構造に対応した時間発展の情報である Ψ より，mode 1 では，元の現象において波長の短い形状が減少していくこと，mode 2 では，変化が少ないことがわかる．これらのことは，解析により得られる複素固有値 $\omega_i = c \pm id$ から定量的に把握できる．$c = d = 0$ の場合，Ψ_i は時間方向の増幅・減衰はなく，$c<0$ の場合は減衰，$c>0$ の場合は増幅を意味する．$d \neq 0$ の場合は振動を意味する．今回の解析では，$\omega_1 = -0.01 \pm 1.0i$，$\omega_2 = -0.0005 \pm 0.05i$ であった．また，得られた空間構造から波長を計算し，固有値 ω を用いて DMD mode ごとの移動速度が求められる．

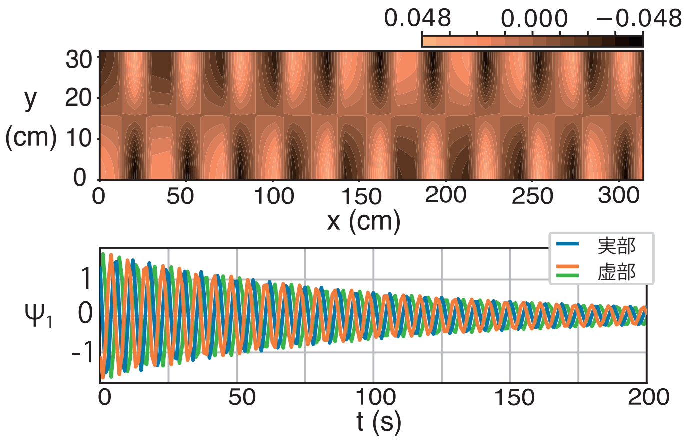
このように，DMD では，空間・時間のスケールが異なる河床波が重ね合わさった現象を mode ごとに分解し，その mode ごとの空間・時間の情報を得ることができる．実在の移動床水理は上記よりも複雑であるが，同解析により移動床水理の機構解明が期待できる．

4 おわりに

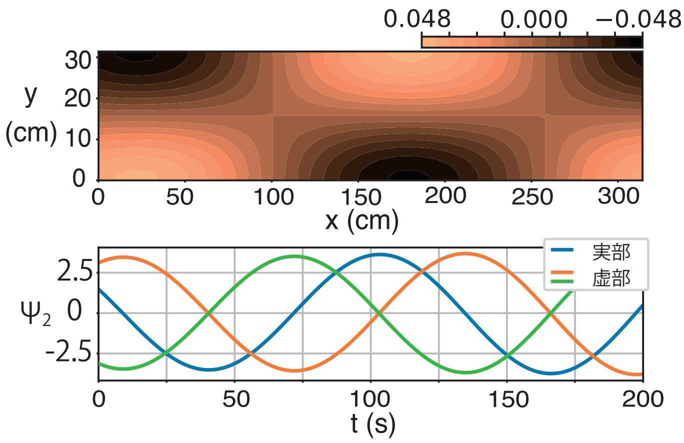
本研究では，時間・空間ともにスケールの異なる河床波が形成される過程を模した波動現象に DMD を適用し，一見複雑に見える現象を単純な DMD mode の重ね合わせで表現できることを示した．今後，実測データを用いた移動床水理の時系列解析に DMD を導入することで，その形成・発達の機構解明を試みる．



図–1: 移流する波動現象の時間発展



図–2: 解析により得られた DMD mode 1, 上段：空間構造 Φ_1，下段：時間発展の情報 Ψ_1



図–3: 解析により得られた DMD mode 2, 上段：空間構造 Φ_2，下段：時間発展の情報 Ψ_2

参考文献

1) Schmid P.J.,”Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data”, *J. Fluid Mech.*, 656, 5, 2010.

2) Moteki D., Murai T., Hoshino H., Yasuda H., Muramatsu S., and Hayasaka K.,”Capture method for digital twin of formation processes of sand bars”, *Phys.Fluids*, doi.org/10.1063/5.0085574, 2022.

3) Tu J.H., Rowley C.W., Luchtenburg D.M., Brunton S.L., and Kutz J.N., ”On dynamic mode decomposition : theory and applications”, *J. Comput. Dyn.*, vol. 1, no. 2, pp. 391-421, 2014.