

図-2 レールたわみ加速度 ESD

レール加速度 ESD の解析結果を図-2 に示す。図より、パスバンド内では、その間のストップバンドに比べ比較的大きな応答の乱れが狭い周波数間隔で離散的に発生している様子が確認できる。なお、ストップバンド内にも 170Hz と 250Hz 付近の 2 箇所に応答のピークが認められるが、パスバンド内の様に密な離散分布とはなっていない。

3 走行調和加振力を受ける軌道のレールたわみ応答の導出

図-3 のレール定点振動応答について考える。

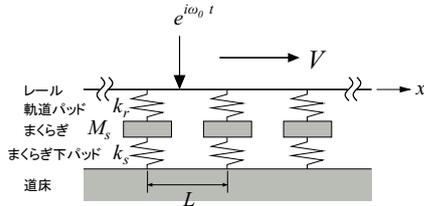


図-3 走行する単位調和加振力を受ける軌道

レールの運動方程式に Floquet 変換を適用し、解を級数展開すると、

$$\hat{u}(\tilde{x}, \omega) = \sum_m u_{0m}(\kappa, \omega) e^{-iz_m \tilde{x}} \left(\kappa = \frac{\omega - \omega_0}{V} \right),$$

$$u_{0m}(\kappa, \omega) := \frac{1}{X_0 V} \left(\delta_{0m} - \frac{1}{g \cdot X_m} \right),$$

$$X_n(\kappa, \omega) := GAKz_n^2 - \rho A \omega^2 + \frac{iGAKz_n^2}{GAK\rho I \omega^2 + EIz_n^2},$$

$$g(\kappa, \omega) := \frac{L}{k_e} + \sum_n \frac{1}{X_n}, \quad z_n = \frac{2n\pi}{L} + \kappa$$

(1)

観測点 \tilde{x} におけるレールたわみの周波数応答 \hat{u} は、式 (1) のように求めることができる。

ここで、 ω_0 は加振円振動数、 ω は円振動数、 G 、 A 、 K 、 ρ 、 I 、 E はそれぞれレールのせん断弾性係数、断面積、せん断係数、質量密度、断面二次モーメント、ヤング率である。また、 k_e はレール支持部の動的等価剛性、 κ は Floquet 波数である。

ここで、 $g(\kappa, \omega) = 0$ をみたす κ - ω 平面の点集合は軌道の分散曲線を与える。

4 応答急変部の発生機構に関する検討

3. に述べた単位調和加振力に対する周波数応答を求めた。ここで、パッド類の減衰は loss factor により与え、その値を 0.2 とした。また、50kgN レールに関する各種物性値は、 $GAK = 168.3\text{MN}$ 、 $EI = 4.04\text{MNm}^2$ 、 $\rho A = 50.47\text{kg/m}$ 、 $\rho I = 0.15\text{kgm}$ と設定した。

加振周波数 $f_0 = \omega_0/2\pi$ が 400Hz、走行速度 V が 20m/s の場合の応答を式 (1) より求めたものを図-4 に示す。また、 u_{0m} における共通項 $1/(VX_0)$ を青線で示した。

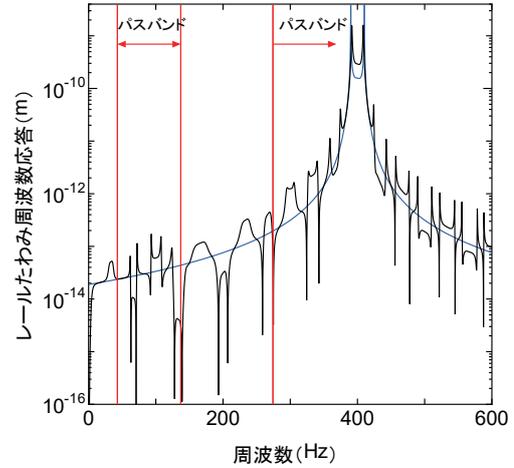


図-4 まくらぎ区間中央におけるレールたわみ周波数応答 (加振周波数 400Hz、走行速度 20m/s)

図-4 より、パスバンド周波数域内において応答の急変箇所 (小さなピーク) が離散的に分布している様子が確認できる。また本解析では加振周波数を 400Hz としているため、その付近に応答の主要部が位置している。一方で、ストップバンド内において急峻なピークは発生していない。

式 (1) から、青線で示した $1/(VX_0)$ の項が \hat{u} の概形を与え、 $1/(gX_m)$ がそれに対する補正項に相当し

ていることが窺える。さらに、共通項 $1/(VX_0)$ には加振周波数の前後2箇所以外に急峻なピークが存在していないことから、 \hat{u} の急変部分には補正項にある X_m と g が関係していると考えられる。

4.1 X_m と g の挙動について

X_m は、 ω_0 からまくらぎ通過振動数 $2V\pi/L$ の m 倍を減じた円振動数で加振する走行速度 V の調和振動荷重を受けるレール単体の振動応答に関係し、その走行線 ($\omega = \omega_0 - 2mV\pi/L + V\kappa$ で与えられる直線) とレール自由振動モードの軌道分散曲線との交点においてはゼロとなり、その波動モードが励起されると考えられる。

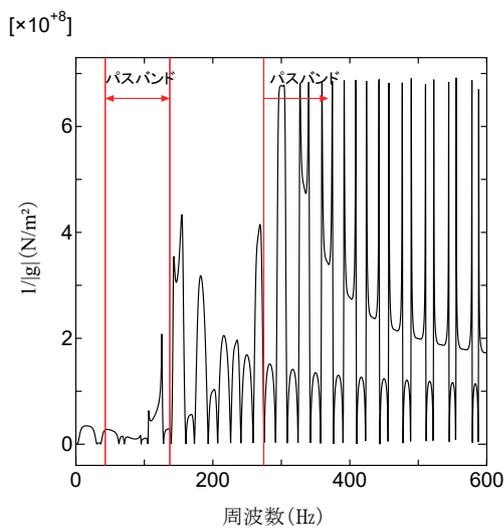


図-5 $1/|g((\omega - \omega_0)/V, \omega)|$ の分布 (加振周波数 400Hz, 走行速度 20m/s)

一方、 g にはまくらぎ支持部の動的等価剛性 k_e が含まれているが、パッド類の伸縮運動は減衰を伴うため k_e は複素数で与えられ、 $g = 0$ をみたく実波数・実周波数のペアはパッド伸縮を伴わないピン-ピン共振点以外に存在しない。よって、当該周波数以外で g がゼロとなることはない。ただし、無減衰系における分散曲線の近傍で $g \approx 0$ となることが予想される。そこで、 $1/|g((\omega - \omega_0)/V, \omega)|$ の分布を加振周波数 400Hz, 走行速度 20m/s として求めたものを図-5 に示す。 $1/|g|$ には特異性が存在しないものの、パスバンド内において極大値を与えており、その前後の周波数域に比べ離散的に大きな値をとっていることがわかる。

これらは、走行線と軌道分散曲線との交点において、 g がゼロとなり、急峻なピークがペアで離散的に発生したものであると推察できる。また、図-5 のピーク群

は軌道分散曲線と走行線群との交点に対応し、応答急変部を与えていると考えられる。

4.2 パスバンドにおける内 \hat{u} の挙動について

図-4 に認められる急変部が何に起因するものであるのかを確認する目的で、式 (1) の m に関する総和を $m = 1$ の 1 項のみに置き換えた $1/(Re(g)X_1)$ を図-6 に示す。

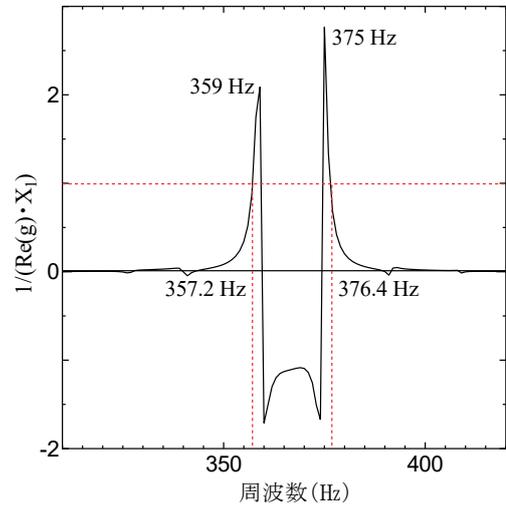


図-6 $1/(Re(g)X_1)$ の周波数分布 (加振周波数 400Hz, 走行速度 20m/s)

図-6 より、359Hz と 375.0Hz にピークが認められる。

4.3 ストップバンド内における \hat{u} の挙動について

図-4 に示した \hat{u} のたわみ周波数応答では、ストップバンド内において急峻なピークが発生していない。式 (1) の m に関する総和を $m = 6$ の 1 項のみに置き換え、 X_6 を例に、 $1/(Re(g)X_6)$ の分布を図-7 に示す。

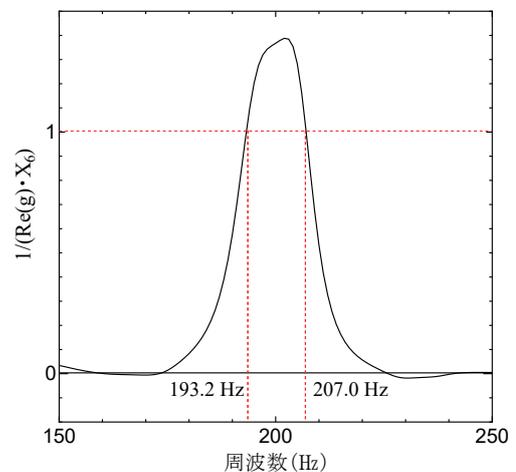


図-7 $1/(Re(g)X_6)$ の周波数分布 (加振周波数 400Hz, 走行速度 20m/s)

図-6に認められた様な2つのピークを生じていないことが確認できる。

4.4 応答急変部の発生原因について

図-6のピークの発生原因について調べるために、レール単体および軌道の分散曲線と、 X_1 , X_6 それぞれに対応する走行線 $\omega = \omega_0 - 2m/L + V\kappa$ との関係を図-8に示す。

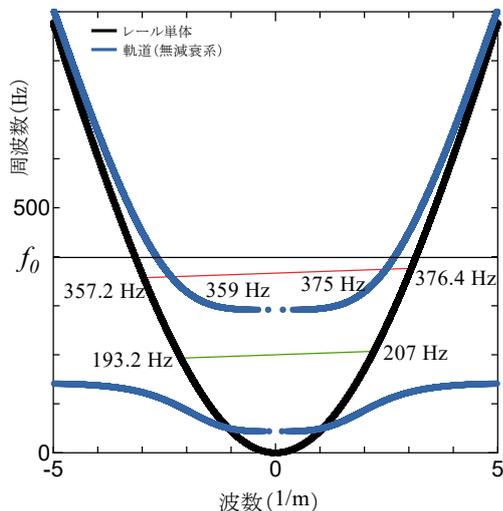


図-8 レール単体および軌道(無減衰系)の分散曲線と走行線(加振周波数400Hz, 走行速度20m/s)

X_1 は、走行線(赤線)とレール単体の分散曲線(黒線)との交点でゼロとなり、当該点の周波数は357.2Hzと376.4Hzの2箇所与えられるが、これらは図-6のピーク周波数とは一致しない。一方、図-8における走行線と軌道の分散曲線(青線)との交点は359Hzと375Hz付近の2箇所に位置しており、それらは図-5の2つのピーク周波数と一致している。これらの交点において $1/|g|$ は極大値をとり、 $1/(gX_1)$ に顕著なピークが発生したと理解することができる。これは分散曲線上の当該箇所における波動モードの励起を意味する。 \hat{u} の応答における離散的急変部は、これに起因するものである。なお、急峻なピークが2つ現れる原因は、図-8に示した傾き V の走行線と軌道分散曲線との交点が2箇所に存在することによるものであり、Doppler効果として解釈することができる。一方、図-6より、 X_6 は200Hzから伸びる走行線(緑線)とレール単体の分散曲線との交点である193.2Hzと207.0Hzでゼロとなる。これは分散曲線上の当該箇所における波動モードの励起を意味する。 \hat{u} の応答における離散的急変部は、これに起因するものである。

以上に述べたことは、式(1)に基づく以下のように説明づけることができる。走行線が軌道の分散曲線と交差する周波数では $g \approx 0$ となり、 u_{0m} における補正項の絶対値は極大値をとる。特に、走行線上で $X_m = 0$ となる場合、走行線と軌道の分散曲線との2つの交点で補正項 $1/(gX_m)$ の絶対値が大ききな値を持つため、当該周波数に顕著なピークが現れる。一方、ストップバンド内では、軌道の分散曲線が存在せず、 $1/|g|$ の極大点に起因する応答の急変が発生していないものと考えられる。

5 おわりに

走行調和加振力を受ける軌道応答について、定点で観測されるたわみの周波数応答特性について調べた。解析例を通して、レールたわみ周波数応答に振幅の急変部が離散的に分布する様子が認められた。その発生機構について、加振周波数およびそこからまくらぎ通過周波数の整数倍離れた周波数から伸びる走行線群と、軌道の分散曲線との交点に対応する波動モードの励起により、応答のピークが離散的に現れることがわかった。なお、Doppler効果により、1つの走行線と分散曲線との交点が2つ存在するため、当該ピークは2つずつ現れる。

参考文献

- 1) Sheng, X., Li, M., Jones, C.J.C. and Thompson, D.J.: Using the Fourier-series approach to study interactions between moving wheels and a periodically supported rail, Journal of Sound and Vibration, Vol.303, pp.873-894, 2007.
- 2) Yoshino, S., Abe, K. and Koro, K.: An analytic solution of mathematical expectation for bogie-track interaction problems, Bulletin of the JSME, Mechanical Engineering Journal, Vol.10(3), No.22-00300, 2023.